Subject :
Year. Month. Date. ( )

دیفرانسیل

مشتق

u تابعی برحسب x

e عدد نپر $(e^u)' \to u'e^u$

$$f(x) = e^{\ln(x^2+2x-3)} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-3} e^{\ln(x^2+2x-3)}$$

مشتق لگاریتم $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \to (\ln(2x)) = \frac{2}{2x}$

$$f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x \quad - \quad g(x) = \cos x \to g'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \to f'(x) = ? \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\underbrace{\cos x . \cos x}_{\cos^2 x} \cancel{+} \underbrace{(-\sin x) . \sin x}_{+\sin^2 x}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

$$(f(x) . g(x))' = f'(x) . g(x) + g'(x) . f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) . g(x) - g'(x) . f(x)}{g^2(x)} \qquad g(x) \neq 0$$

$$f(x) = \cot x \to f'(x) = ? \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{\underbrace{-\sin x . \sin x}_{-\sin^2 x} - \underbrace{\cos x . \cos x}_{-\cos^2 x}}{\sin^2 x} = 1 - \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = 1 - \cot^2 x$$

$$f(x) = \sin x\, e^{2x} + \ln x^2$$

$$f'(x) = \cos x . e^{2x} + 2 \sin x\, e^{2x} + \frac{2x}{x^2}$$

$$f(x) = \sin^2 x \to f'(x) = 2 \cos x \sin x$$

$$f^n(x) = n f(x)' f(x)^{n-1} \quad [n u' u^{n-1}]$$

POCO X3 PRO

Year. Month. Date. ( )

$$f(x) = \sin^n x \to f'(x) = n \cos x \sin^{n-1} x$$

$$f(x) = \cos^2 x \cdot \tan x + 2x$$

$$f'(x) = -2\sin^2 x \cos x \cdot \cancel{\tan x}^{\frac{\sin x}{\cos x}} + \underbrace{\cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}_{1} + 2$$

$$= -2\sin^2 x + 3$$

انتگرال

$$\int f(x)dx$$

$$\int \square dx = \triangle \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

عدد ثابت

$$(\triangle)' = \square$$

$$\int 2\,dx = 2x + C \to 2\int dx = 2x + C$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (x^2 + 2x - 3)dx = \int x^2 dx + \int 2x\,dx - \int 3\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3x + C$$

$$\int \frac{x^2 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (x^2 + \cos x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \sin x\right) + C$$

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}} dx = \ln|e^{2x}| + C$$

Scanned with CamScanner

Year. Month. Date. ( )

معادله دیفرانسیل

تعریف : به معادله ای که شامل یک تابع و مشتقات آن باشد معادله دیفرانسیل می‌گویند.

y ها ← برحسب x

مثال : ① $2y+y'=0$ ② $y''-2=0$ ③ $y-2y'+e^{x}y''=2e^{2x}$

جواب معادله دیفرانسیل : تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند را جواب معادله دیفرانسیل می‌گویند.

معادلات دیفرانسیل به دو دسته ی کلی تقسیم می‌شوند :

① معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ← (یعنی از ۲ متغیر بیشتر)

که در معادله دیفرانسیل وجود دارد

② معادلات دیفرانسیل معمولی * : (تابعی که از یک متغیر تشکیل شده)

معادلات دیفرانسیل معمولی به دو دسته ی کلی تقسیم میشوند :

① معادلات دیفرانسیل خطی : « معادله دیفرانسیل خطی - فرم کلی $f_n(x)y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+f_1(x)y'+f_0(x)y=f(x)$ »

② معادلات دیفرانسیل غیرخطی : « معادله دیفرانسیلی که خطی نباشد را غیرخطی می‌گویند »

① راه تشخیص معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی از هم : اگر عامل غیرخطی روی تابع و مشتقات آن اثر کند ، معادله دیفرانسیل غیرخطی است .

مثال : ① $x^2+g(x)y''+\cos(x)y'+x^2y=5$ → خطی ، همه چیز روی x است

② $y'+x\sin y=5$ غیرخطی ، عامل غیرخطی مشتقاتی روی y اثر کرده

③ $y''+2x|y|=5x^2$ غیرخطی ، چون ″

۰۹۳۹۳۵۵۴۳۲۹

Subject: @headshotq1

Year. Month. Date. ( )

۲ انفره تعریف - انفره تشریح راه حل -

④ $y'' + 2x\int_0^x y\,dx = \sin^2 x$ غیرخطی، چون y توان داره

با این حل شه = $y'' + 2xy^2 = \sin^2 x$

⑤ $5y'' + 2x[y] = 3$ غیرخطی، جزء صحیح روی y اثر کرده

مرتبه معادله دیفرانسیل: به بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل، مرتبه معادله دیفرانسیل می‌گویند.

درجه معادله دیفرانسیل: به بالاترین توان مرتبه معادله دیفرانسیل درجه معادله دیفرانسیل می‌گویند. درجه باید صحیح باشد

نکته: معادلات دیفرانسیلی که توان آنها بیش تر از یک باشد غیرخطی است

~~جواب معادله دیفرانسیل~~:

مثال: جواب معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

① $y^2 + y'^2 = 1 \rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $y = \sin x$ یا $y = \cos x$

② $\overbrace{|y'|}^{\geq 0} + \overbrace{|y|}^{\geq 0} + \overbrace{3}^{>0} = 0$ جواب ندارد

③ مثال: بررسی کنید آیا تابع $y = e^x + 3e^{-x}$ جواب معادله دیفرانسیل $y'' - y = 0$ هست یا

خیر: هست

$y' = e^x + -3e^{-x}$

$y'' = e^x + 3e^{-x}$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

جواب عمومی معادله دیفرانسیل : کلی ترین جواب معادله دیفرانسیل که شامل پارامترهای ثابت می‌باشد را جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌گویند

مثال : معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ را در نظر بگیرید. تابع $y=C_1\sin x+C_2\cos x$

پارامترهای ثابت

جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق است.

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x$$
$$y'=C_1\cos x-C_2\sin x$$
$$y''=-C_1\sin x-C_2\cos x$$

$$y''+y=-C_1\sin x-C_2\cos x+C_1\sin x+\cos x=0$$

* هر عددی جایگذاری کنیم جواب صفر است.

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل : اگر در جواب عمومی معادله دیفرانسیل به جای پارامترهای ثابت مقدار قرار دهیم جواب خصوصی بدست می‌آید

جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل : تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند و از جواب عمومی بدست نیاید.

مثال : معادله دیفرانسیل $y=xy'-\frac{y'^2}{4}$ را در نظر بگیرید. بررسی کنید آیا تابع $y=Cx-\frac{C^2}{4}$

جواب عمومی معادله هست یا خیر؟

$$y'=C$$
$$y=Cx-\frac{C^2}{4} \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow{C=3} y=3x-\frac{9}{4} \longleftarrow \text{جواب خصوصی}$$

- بررسی کنید آیا تابع $y=x^2$ جواب معادله هست یا خیر؟

$$y'=2x \rightarrow y=2x^2-\frac{4x^2}{4} \rightarrow y=x^2$$

هر مقداری در $y=Cx-\frac{C^2}{4}$ بگذاریم $y=x^2$ در نمیاد ولی جواب معادله هست اما از جواب عمومی بدست نمیاد، جواب غیرعادی هست

Year. Month. Date. ( )

$2yxdy = (y^2 - x)dx$ بررسی کنید تابع $y^2 = C_1x - x\ln x$ جواب معادله دیفرانسیل هست یا خیر؟

$y^2 = C_1x - x\ln x$

$2ydy = C_1 - (1 \times \ln x + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}}) \to C_1 - (\ln x + 1)$

بررسی کنید تابع $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$ جواب معادله دیفرانسیل $y'' - 6y' - 9y = 0$ هست یا خیر؟

$y' = 3C_1e^{3x} + C_2e^{3x} + C_2 3xe^{3x}$

$y'' = 9C_1e^{3x} + 3C_2e^{3x} + 3C_2e^{3x} + 9C_2xe^{3x}$

$\boxed{(e^u)' = u'e^u}$

$\cancel{9C_1e^{3x}} + \cancel{6C_2e^{3x}} + \cancel{9C_2xe^{3x}} - \cancel{18C_1e^{3x}} - \cancel{6C_2e^{3x}} - \cancel{18C_2xe^{3x}} + \cancel{9C_1e^{3x}} +$

$\cancel{9C_2xe^{3x}} \Rightarrow 0$

این تابع جواب این معادله دیفرانسیل هست.

POCO X3 PRO

Subject :
Year. Month. Date. ( )

۱۰- تشکیل معادله دیفرانسیل :

اگر جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل داده شده باشد میتوان به وسیله آن معادله دیفرانسیل متناظر با این جواب عمومی را بدست آورد.

فرض کنید تابع $f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n باشد معادله متناظر با این جواب عمومی از دستگاه

$$\begin{cases} f'(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \\ f''(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \\ \vdots \\ f^{(n)}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \end{cases}$$

حذف کردن این مقادیر ثابت هیچ روش مشخصی ندارد

بدست می آید.

پس اگر جواب عمومی دارای n پارامتر ثابت بود برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل متناظر با آن n بار مشتق میگیریم.

مثال : معادله دیفرانسیلی بنویسید که تابع $y = ae^x + b\cos x$ ① جواب عمومی آن باشد.

$y' = ae^x - b\sin x$ ②

$y'' = ae^x - b\cos x$ ③

$y' - y'' = \cancel{ae^x} - b\sin x - \cancel{ae^x} + b\cos x = 0 \to b(\cos x - \sin x) \to b = \dfrac{y' - y''}{\cos x - \sin x}$

$y + y'' = ae^x + b\cancel{\cos x} + ae^x - b\cancel{\cos x} \to 2ae^x \to a = \dfrac{y - y''}{2e^x}$

جایگذاری در ① : $\dfrac{y + y''}{2e^x}$

معادله دیفرانسیل همه دوایری را بدست آورید که مرکز آنها روی محور x ها باشد.

$(x-a)^2+y^2=R^2$

a و R چون ثابت

$\xrightarrow{'} 2(x-a)+2yy'=0$

$\to 2x-2a+2yy'=0$

$\xrightarrow{''} 2-0+2y'y'+2y''y=0 \to 2+2y'^2+2y''y=0 \to 1+y'^2+y''y=0$

معادله دایره به مرکز (a,b) و شعاع R ← $(x-a)^2+(y-b)^2=R$

$\to (x-a)^2+y^2=R^2$

تمرین: معادله همه دوایری را بدست آورید که مرکز آنها مبدا مختصات باشد

$(0,0)$ مبدا مختصات $\to x^2+y^2=R^2$

$\xrightarrow{'} 2x+2yy'=0$

تمرین: معادله همه دوایری را بدست آورید که مرکز آنها روی محور y ها باشد

مختصات $\to (0,a) \to x^2+(y-b)^2=R^2$

$\xrightarrow{'} 2x+2(yy'-1)=0 \to 2x+2yy'-2=0$

$\xrightarrow{''} 2+2(yy''+y'y')+0=0 \to 2+2yy''+2y'^2=0$

$\downarrow$

$1+yy''+y'^2=0$

Scanned with CamScanner

Subject :
Year. Month. Date. ( )

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول : معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی که بتوان جواب آن را به روش مشخص بدست آورد به ٤ دسته کلی تقسیم میشوند

١) معادلات دیفرانسیل جداییپذیر (تفکیک پذیر)
٢) معادلات دیفرانسیل همگن
٣) معادلات دیفرانسیل کامل
٤) معادلات دیفرانسیل خطی

١) معادلات دیفرانسیل تفکیک پذیر : معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی که بتوان آنها را به صورت $h(x)dx = g(y)dy$ نوشت را معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر می‌گویند.

مثال: $y' = x - xy - y + 1$

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y) - y + 1$$

$$= x(1-y) + (1-y) = (1-y)(x+1)$$

شکل استاندارد — تفکیک پذیر

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)(x+1) \rightarrow \boxed{\frac{dy}{1-y} = (x+1)dx} \rightarrow \boxed{\frac{1}{1-y}dy = (x+1)dx}$$

بدست آوردن جواب معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر:

١) برای بدست آوردن جواب معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر به شکل زیر عمل می‌کنیم :
به جای y' ، $\frac{dy}{dx}$ قرار میدهیم

٢) با اعمال ریاضی مناسب متغیرها را از هم تفکیک می‌کنیم تا معادله به شکل استاندارد $h(x)dx = g(y)dy$ تبدیل شود

٣) سپس از طرفین تساوی انتگرال می‌گیریم

٤) جواب را به شکل استاندارد $(y = f(x))$ ~~...~~ می‌نویسیم

POCO X3 PRO

مثال: جواب معادله دیفرانسیل را بدست آورید.

$$y' = x - xy - y + 1$$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{1-y} = \int (x+1)\,dx \xrightarrow[(x+1)]{\text{انتگرال}} \int (x+1)\,dx = \int x\,dx + 1\int dx - \int \frac{-dy}{1-y} =$$

$\ln|1-y|$

$$\xrightarrow{\text{جواب}} -\ln(1-y) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2} = \frac{1}{2}\ln x^2$$

$$e^{\ln f(x)} = f(x)$$

$$e^{\ln(1-y)} = e^{\left(-\frac{x^2}{2} - x + C\right)}$$

$$1-y = e^{\left(-\frac{x^2}{2} - x + C\right)}$$

$$\Rightarrow y = -e^{-\frac{x^2}{2} - x + C} + 1$$

مثال: جواب معادله $y' = y^{\frac{1}{2}}$ را بدست بیاورید. (به صورت تفکیک پذیر)

$\rightarrow \sqrt{y}$

$$y' = \sqrt{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \rightarrow dy = \sqrt{y}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx$$ جواب درست

Scanned with CamScanner

مثال: جواب معادله ی $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ را بدست آورید.

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \longrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

Scanned with CamScanner

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال : معادله دیفرانسیل جداشدنی $y(0)=1$ $\quad y^2(1-x^2)\frac{1}{2}dy = \sin^{-1}x\,dx$ را حل کنید.

$$\int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C$$

$$\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \sin^{-1}x = u \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = du$$

$$\int \sin^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2}$$

$$\frac{y^3}{3} + C = \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} \rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} + C \rightarrow y^3 = \frac{3(\sin^{-1}x)^2}{2} + C$$

$$y^3 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sin^{-1}x)^2 + 2}$$

معادلات دیفرانسیل همگن

تابع $f(x,y)$ را همگن همراه برای هر $\lambda \neq 0$ ، $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ به اول تابع میگن همگن از درجه n . $(n \in Z)$

مثال : نشان دهید تابع $f(x,y) = xy + x^2 + y^2$ همگن است.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \cdot \lambda y + \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 x.y + \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2$$

$$= \lambda^2(xy + x^2 + y^2) = \lambda^2 f(x,y)$$ همگن از درجه ۲

مثال : نشان دهید تابع $f(x,y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ همگن است.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) \rightarrow = \lambda^0 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$ همگن از درجه ۰

Scanned with CamScanner

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال: $f(x,y)=x^4+y^3$

$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^4x^4+\lambda^3y^3 \rightarrow \lambda^3(\lambda x^4+y^3)$ همگن نیست

مثال: $f(x,y)=xye^{y^2}$

$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 xye^{\lambda^2 y^2}$ همگن نیست

معادله دیفرانسیل همگن: معادلات دیفرانسیلی به فرم $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

که در آن $M(x,y)$ و $N(x,y)$ توابعی همگن و از یک درجه هستند را معادله دیفرانسیل همگن می‌گویند.

مثال: همگن یا ناهمگن بودن را نشان دهید.

1) $\underbrace{(x^2+xy)dx}_{M(x,y)}+\underbrace{(x^2+y^2)dy}_{N(x,y)}=0$

$\lambda^2x^2+\lambda^2xy=\lambda^2(x^2+xy)$ همگن از درجه ۲

$\lambda^2x^2+\lambda^2y^2=\lambda^2(x^2+y^2)$ همگن از درجه ۲

2) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(\frac{y}{x})}{\frac{x}{y}}$ $\quad \frac{x}{y}dy-\sin(\frac{y}{x})dx=0$ $\quad \frac{\lambda x}{\lambda y}=\frac{x}{y}$ همگن از درجه صفر

$\sin(\frac{\lambda y}{\lambda x})=\sin\frac{y}{x}$ همگن از درجه صفر

3) $(x^2+e^x)dx+(xy+y^2)dy=0$

همگن نیست

Subject :

Year. Month. Date. ( )

④ $(x+y-2)\,dx + dy = 0$

همگن نیست

حل معادلات دیفرانسیل همگن: برای حل معادلات دیفرانسیل همگن از تغییر متغیر $y = v.x$ استفاده می‌کنیم. از اینجا خواهیم داشت

$$dy = x\,dv + v\,dx$$

اکنون با جایگذاری این مقادیر در معادله، معادله به معادله تفکیک پذیر تبدیل میشود.

مثال: معادله دیفرانسیل $y' - \frac{y}{x} + \operatorname{Cosec}\frac{y}{x} = 0$, $y(1) = 0$ را حل کنید.

$\operatorname{Cosec} = \frac{1}{\sin}$

$$y = vx \rightarrow dy = x\,dv + v\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \csc\frac{y}{x} = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \csc\frac{y}{x}$$

$$\csc = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sec = \frac{1}{\cos x}$$

$$dy = \frac{y}{x}dx - \csc\frac{y}{x}dx \rightarrow x\,dv + \cancel{v\,dx} = \cancel{v\,dx} - \csc v\,dx$$

$$x\,dv = -\csc v\,dx \rightarrow \frac{dv}{\csc v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \sin v\,dv = \ln(x) + C \rightarrow -\cos v = -\ln(x) + C$$

$$\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \ln x = C \rightarrow \cos 0 - \ln 1 = C$$

$$1 - 0 = \boxed{C = 1}$$

POCO X3 PRO

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(5x-2y)y'-y=2x$ را بدست آورید.

$$(5x-2y)\frac{dy}{dx}-\cancel{y}=2x+y \rightarrow (5x-2y)dy=2x\,dx+y\,dx$$

$$(5x-2y)dy-(2x+y)dx=0 \rightarrow (5x-2u_x)dy-(2x+u_x)dx=0$$

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $(x^2+y^2)dx + 2x(x+y)dy = 0$ را بدست آورید.

$M(x,y) = x^2+y^2$

$\to M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2$

$N(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda x(\lambda x + \lambda y) = \lambda^2 2x(x+y)$ همگن از درجه ۲

$y = ux \to dy = u\,dx + x\,du$

جایگذاری $\to (x^2+u^2x^2)dx + (2x^2+2ux^2)(u\,dx + x\,du) = 0$

$\to x^2dx + u^2x^2dx + 2x^2u\,dx + 2x^3du + 2u^2x^2dx + 2ux^3du = 0$

dx ها از du ها جدا میشن

$\to x^2dx + u^2x^2dx + 2x^2u\,dx + 2u^2x^2dx = 0$

$\to (x^2+u^2x^2+2x^2u+2u^2x^2)dx + (2x^3du + 2x^3 + 2ux^3)du = 0$

$\to (2x^3+2ux^3)du = -(x^2+u^2x^2+2x^2u+u^2x^2)dx \to \frac{du}{dx}$

$$= \frac{-(x^2+u^2x^2+2x^2u+2u^2x^2)}{2x^3+2ux^3}$$

Year. Month. Date. ( )

* معادلات دیفرانسیل کامل.

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را کامل گویند هرگاه $M_y=N_x$.

مثال. مشخص کنید هر یک از معادلات زیر کامل هستند یا خیر.

① $(x^2+y^2)dx+(2xy+y^2)dy=0$

$M(x,y)=x^2+y^2 \longrightarrow M_y=2y$
$N(x,y)=2xy+y^2 \longrightarrow N_x=2y$
$\longrightarrow M_y=N_x$ کامل

② $(xe^y+e^y)dx+(xe^y+xy^2)dy=0$

$M(x,y)=xe^y+e^y \longrightarrow M_y=xe^y+e^y$
$N(x,y)=xe^y+xy^2 \longrightarrow N_x=e^y+y^2$
$\longrightarrow M_y\neq N_x$ کامل نیست

③ $(3x^2+4xy)dx+(2x^2+2y)dy=0$

$M(x,y)=3x^2+4xy \longrightarrow M_y=4x$
$N(x,y)=2x^2+2y \longrightarrow N_x=4x$
$\longrightarrow M_y=N_x$ کامل

جواب معادله دیفرانسیل کامل.

① روش اول (انتگرال گیری). برای حل معادلات دیفرانسیل کامل به روش انتگرال گیری از دو فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

① $\int M(x,y)dx+\int N(x,y)\left(\text{به جز جمله های } x \text{ دار}\right)dy=c$

یا

② $\int M(x,y)\left(\text{به جز جمله های } y \text{ دار}\right)dx+\int N(x,y)dy=c$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال. جواب معادله‌ی دیفرانسیل کامل $(x-y)dx+(-x+y+2)dy=0$ را بدست آورید.

$M_y=-1$, $N_x=-1$ $\quad M_y=N_x=$ کامل

$$\int(x-y)dx+\int(y+2)dy=c$$

$$\longrightarrow \frac{x^2}{2}-xy+\frac{y^2}{2}+2y=c$$

مثال. جواب معادله دیفرانسیل $(2xy^2+2y)dx+(2x^2y+2x)dy=0$ را بدست آورید.

$M(x,y)=2xy^2+2y \longrightarrow M_y=4xy+2$
$N(x,y)=2x^2y+2x \longrightarrow N_x=4xy+2$
$\longrightarrow M_y=N_x$ کامل

(1) $$\int(2x^2y+2x)dy=c$$

$$\longrightarrow \cancel{2}x^2\frac{y^2}{\cancel{2}}+2xy=c \longrightarrow x^2y^2+2xy=c$$

(2) $$\int(2xy^2+2y)dx=c$$

$$\int(2xy^2)dx+\int 2y\,dx=c$$

$$\frac{\cancel{2}y^2x^2}{\cancel{2}}+2yx=c \longrightarrow x^2y^2+2xy=c$$

Scanned with CamScanner

حل معادلات دیفرانسیل کامل به روش دسته‌بندی:

در حل معادله دیفرانسیل کامل به روش دسته‌بندی ابتدا جملات را در دیفرانسیل ها ضرب می‌کنیم و از جملاتی که دارای یک متغیر هستند انتگرال می‌گیریم پس جملاتی که بیش از یک متغیر دارند دو به دو تشکیل یک معادله کامل می‌دهند. از هر معادله کامل جدید یک جمله را به دلخواه حذف می‌کنیم و از باقیمانده ها انتگرال می‌گیریم.

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $(2xe^{x}y^{2}+2y)dx+(2x+2ye^{x^2})dy=0$ را بدست آورید.

$M_y = 4xe^{x}y+2$
$N_x = 4xe^{x^2}+2$

کامل نیست

مثال: جواب معادله $(4xy-2y)dx+(2x^2-2x)dy=0$ را بدست آورید.

$M_y = 4x-2$
$N_x = 4x-2$

کامل ✓

$$(4xy-2y)dx+(2x^2-2x)dy=0$$
$$4xydx-2ydx+2x^2dy-2xdy=0 \rightarrow (4xydx+2x^2dy)+(-2ydx-2xdy)=0$$
$$\rightarrow \int 4xydx-\int 2ydx=C \rightarrow 4y\frac{x^2}{2}-2xy=C$$

مثال: $\underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{همگن از درجه ۲}}dx+\underbrace{(x^2+y^2+2xy)}_{\text{همگن از درجه ۲}}dy=0$

عامل انتگرال ساز :

اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (*) کامل نباشد یعنی $M_y \neq N_x$ در این صورت می‌توان تابع $\mu \neq 0$ را طوری یافت که $(\mu M)_y=(\mu N)_x$ یعنی $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$ یک معادله دیفرانسیل کامل است.

تابع μ را یک عامل انتگرال ساز برای معادله دیفرانسیل (*) می‌نامیم

مثال :

$$2x(y-e^{-x^2})dx+dy=0$$
$$M(x,y)=2xy-2xe^{-x^2}$$
$$N(x,y)=1$$
$$M_y=2x \quad , \quad N_x=0 \longrightarrow 2x\neq 0$$
کامل نیست
$$P(x)=\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{2x-0}{1}=2x$$
$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$$
$$2xe^{x^2}(y-e^{-x^2})dx+e^{x^2}dy=0$$
$$\rightarrow (2xe^{x^2}y-2x)dx+e^{x^2}dy=0$$
$$(\mu M)_y=2xe^{x^2} \longrightarrow (\mu M)_y=(\mu N)_x$$
$$(\mu N)_x=2xe^{x^2}$$

معادلات دیفرانسیل خطی : مرتبه اول

معادله‌ای به فرم کلی $\frac{dy}{dx}+P(x)y=q(x)$ را خطی می‌نامند، دارای عامل انتگرال ساز

توابعی پیوسته بر حسب x

$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$ می‌باشد و جواب عمومی آن از $y=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx+C\right)$

بدست می‌آید.

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

نکته → $e^{\ln f(x)} = f(x)$

مثال: جواب $y' + y\cot x = \frac{1}{\sin x}$ را بدست آورید.

عامل انتگرال ساز → $\mu(x) = e^{\int \cot x\, dx} \boxed{= e^{\ln \sin x} = \sin x}$

جواب عمومی → $y = \frac{1}{\sin x}\left(\int \frac{1}{\cancel{\sin x}} \times \cancel{\sin x}\, dx + C\right) = \frac{1}{\sin x}(x + C) =$

$$\frac{x}{\sin x} + \frac{C}{\sin x} = \frac{x + C}{\sin x}$$

مثال: جواب معادله $yy' - 7y = 4x$ را بدست آورید.

معادله دیفرانسیل خطی نیست

مثال: جواب معادله $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$ را بدست آورید.

$(x^2 + y^2)dx = 2xy\,dy \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ معادله دیفرانسیل خطی نیست

مثال: جواب معادله $(\sin^2 x - y)dx - \tan x\, dy = 0$ را بدست آورید.

$(\sin^2 x - y)dx = \tan x\, dy \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x - y}{\tan x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x}{\tan x} - \frac{y}{\tan x}$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{\tan x} = \sin x \cos x$

عامل انتگرال ساز ⇒ $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{\tan x} dx} = e^{\int \cot dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$

جواب → $y = \frac{1}{\sin x}\left(\int \cos x . \sin x\, dx + C\right) = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{\sin^2 x}{2} + C\right) = \frac{\sin x}{2} + \frac{C}{\sin x}$

نکته: $\int (2x + 3)(x^2 + 3x)^4 dx \rightarrow \int u'.u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

Scanned with CamScanner

مثال: جواب معادله $2ydx = (x^2-1)(dy-dx)$ را بدست آورید.

$$2ydx = x^2dy - x^2dx - dy + dx \rightarrow 2ydx + x^2dx - dx = x^2dy - dy$$

$$dx(2y+x^2-1) = dy(x^2-1) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y+x^2-1}{x^2-1} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{2y}{x^2-1}}_{p(x)} + \underbrace{1}_{q(x)}$$

عامل انتگرال ساز $\rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x^2-1}dx} = e^{\int \frac{2}{(x+1)(x-1)}dx}$

تجزیه کسر ← کوئیز

معادلات دیفرانسیل برنولی: این معادلات به فرم کلی $* \; y' + p(x)y = q(x)y^n$ میباشد.

این معادلات با تغییر متغیر به معادله دیفرانسیل خطی تبدیل میشوند.

1) اگر $n=0$ یا $n=1$ باشد آنگاه معادله * خطی است.

2) اگر $n \neq 0$ و $n \neq 1$ باشد در این صورت طرفین معادله * را بر y^n تقسیم میکنیم.

$$* \; y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

اکنون قرار میدهیم $u = y^{1-n}$ در نتیجه $u' = (1-n)y'y^{-n}$

اکنون مقادیر بدست آمده را در * جاگذاری میکنیم ←

$$\frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x)$$

$$\rightarrow ** \; u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

لذا ** یک معادله دیفرانسیل خطی برحسب u و x است.

- مراحل بدست آوردن جواب معادله دیفرانسیل برنولی:

1) معادله را به فرم استاندارد برای تشخیص n قرار میدهیم.
2) طرفین را در y^{-n} ضرب میکنیم
3) با تغییر متغیر معادله را به خطی تبدیل میکنیم
4) u را بدست آورده و نهایتاً جواب را برحسب x,y می‌نویسیم

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

مثال: معادله دیفرانسیل $y' - 2xy = 4xy^{\frac{1}{2}}$ را حل کنید.

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{2xy}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{4xy^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} \to y'y^{-\frac{1}{2}} - 2xy^{\frac{1}{2}} = 4x$$

$$u = y^{\frac{1}{2}} \to u' = \frac{1}{2}y'y^{-\frac{1}{2}} \to 2u' - 2xu = 4x \xrightarrow{\div 2} u' - xu = 2x$$

(حال معادله دیفرانسیل خطی برحسب u و x داریم)

عامل انتگرال ساز $\to \mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$u = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx + C\right) \to \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\left(\int 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right)$$

$$\to e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right) \to e^{\frac{x^2}{2}}\left(-2\int -xe^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right)$$

$$\to e^{\frac{x^2}{2}}\left(-2e^{-\frac{x^2}{2}} + C\right) = -2 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$u = -2 + Ce^{\frac{x^2}{2}} \to \sqrt{y} = -2 + Ce^{\frac{x^2}{2}} \to y = \left(-2 + Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)^2$$

معادلات دیفرانسیل ریکاتی: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به فرم $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$ ☆ که در آن R و Q و P توابعی برحسب x هستند را ریکاتی می‌گویند.

- اگر $y_1 = u(x)$ جواب معادله دیفرانسیل ریکاتی ☆ باشد در این صورت $y = u(x) + \frac{1}{v(x)}$ نیز جواب ☆ است که در آن v در معادله $v' - [2uQ + P]v = Q$ صدق می‌کند.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل ریکاتی $y' + \overbrace{(2x-1)}^{P(x)}y \overbrace{-1}^{q(x)}y^2 = x^2 - x + 1$ که جواب آن $y_1 = x$ است را به دست آورید.

$$v' - [-2x + 2x - 1]v = -1 \to v' + v = -1 \to v' = -1 - v$$

$$\frac{dv}{dx} = -1 - v \to \frac{dv}{1+v} = -dx \xrightarrow{\int} \ln(1+v) = -x + C \to e^{\ln(1+v)} = e^{-x+C}$$

$$\to 1 + v = e^{-x+C} \to v = e^{-x+C} - 1 \to \boxed{y = x + \frac{1}{e^{-x+C} - 1}}$$

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

تمرین ۱: معادله دیفرانسیل برنولی روبه‌رو را حل کنید.

$$y(4y^2-x-1)dx+2xdy=0$$

$$y(4y^2-x-1)dx = 2x\,dy \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(4y^2-x-1)}{2x} \quad 4y^3-xy-y$$

$$\rightarrow y' - \underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\right)}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{-2}{x}}_{q(x)} y^{3} \quad 3 \rightarrow n$$

$$y'y^{-3} - y^{-2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\right) = \frac{-2}{x} \qquad u = y^{1-3} = y^{-2} \rightarrow u' = -2y'y^{-3}$$

$$\rightarrow \frac{u'}{-2} - u\left(\frac{x+1}{2x}\right) = \frac{-2}{x}$$

$$\xrightarrow{\times -2} u' + u\left(\frac{x+1}{2x}\right) = \frac{4}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int}$$

تمرین ۲: معادله دیفرانسیل برنولی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = y \cot x + \frac{y^2}{\sin x}$$

$$y' - \underbrace{\cot x}_{P(x)}\, y = \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{q(x)} y^{\overbrace{2}^{n}} \rightarrow y'y^{-2} + (-\cot x)y^{-1} = \frac{1}{\sin x}$$

$$u = y^{2} \rightarrow$$

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

تمرین ۳ : جواب عمومی معادله دیفرانسیل ریکاتی $y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1$ که جواب آن $y_1 = 1$ است را بصورت $y = u(x) + \frac{1}{v(x)}$ بدست آورید.

$u(x)$

$$y' + \underbrace{(-1+2x)}_{P(x)} y + \underbrace{(-x)}_{q(x)} y^2 = \underbrace{x-1}_{R(x)}$$

$$v' - [2uQ + P]v = Q \rightarrow v' - [2 \times 1 \times (-x)]v = -x \rightarrow v' + \underbrace{2x}_{P(x)} v = \underbrace{-x}_{q(x)}$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \rightarrow e^{\int 2x dx} = e^{\frac{2x^2}{2}} =$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x) \cdot q(x) \, dx + C\right) \rightarrow y = \frac{1}{\quad}\left(\int \quad x(-x) \, dx + C\right)$$

تمرین ٤ : جواب عمومی معادله دیفرانسیل ریکاتی $y' = e^{-x} y^2 + y - e^x$ که جواب آن $y_1 = e^x$ است را بصورت $y = u(x) + \frac{1}{v(x)}$ بدست آورید.

$u(x)$

$$\rightarrow y' \underbrace{-e^{-x}}_{P(x)} y^2 \underbrace{-y}_{q(x)} = \underbrace{-e^x}_{R(x)}$$

$$v' - [2uQ + P]v = Q \rightarrow v' - [\overbrace{2e^x \times (-1)}^{-2e^x} + \overbrace{(-e^{-x})}^{-e^{-x}}]v = -1$$

معادلات دیفرانسیل کلرو:

هر معادله دیفرانسیل به صورت ۱) $y = xp + f(p)$ و یا ۲) $y = xy' + f(y')$ که $p = \frac{dy}{dx}$ را یک معادله دیفرانسیل کلرو می‌نامند.

جواب عمومی معادله کلرو برابر $y = Cx + f(C)$ است و جواب ~~خصوصی~~ غیرعادی آن از حل دستگاه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

مثال: جواب غیرعادی و عمومی معادله دیفرانسیل $y = xy' - 4(y')^3$ را بدست آورید.

جواب عمومی $\rightarrow y = Cx - 4C^3$

جواب غیرعادی $\rightarrow \begin{cases} y = xp - 4p^3 \\ y = xp + f(p) \end{cases} \rightarrow f(p) = -4p^3$

$\boxed{x = +12p^2} \qquad y = -p\,12p^2 - 4p^3 \rightarrow -12p^3 - 4p^3 = \boxed{-16p^3}$

$$\begin{cases} x = 12p^2 \rightarrow p^2 = \frac{x}{12} \\ y = -16p^3 \rightarrow y^2 = 256\left(\frac{x}{12}\right)^3 \rightarrow y = \sqrt{256\left(\frac{x}{12}\right)^3} \end{cases}$$

تمرین: معادله دیفرانسیل کلرویی را بیابید که جواب غیرعادی آن $y = x - x^3$ باشد.

$y = x - x^3 \rightarrow y' = 1 - 3x^2 \Longrightarrow p = 1 - 3x^2 \xrightarrow{\times(-1)} p - 1 = -3x^2 \rightarrow \sqrt{\frac{1-p}{3}} = \sqrt{x^2}$

$\rightarrow \sqrt{\frac{1-p}{3}} = x \rightsquigarrow x = -f'(p) \rightarrow -\sqrt{\frac{1-p}{3}} = f'(p)$

$y = xp + f(p) \rightarrow f(p) = y - xp \rightsquigarrow f(p) = (x - x^3) - x(1 - 3x^2)$

$\rightarrow \cancel{x} - x^3 - \cancel{x} + 3x^3 \Rightarrow f(p) = 2x^3 \quad \left\{ x^3 = x \cdot x^2 = \sqrt{\frac{1-p}{3}} \cdot \frac{1-p}{3} = \frac{(1-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \right.$

$f(p) = 2\left(\frac{(1-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}(1-p)^{\frac{3}{2}}$

$y = xy' + f(y') \rightsquigarrow y = xy' + \frac{2}{3\sqrt{3}}(1-y')^{\frac{3}{2}}$

Scanned with CamScanner

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال‌ها مهم

مثال: بررسی کنید آیا تابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل هست یا خیر؟ $y''+y=0$ ✓

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$y' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \qquad y'' = 0 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots$$

$y''-y=0$ ✓

مثال: جواب منحصر به فرد معادله $(y')^2 + 4y^2 = 0$ را بدست آورید.

$$\left.\begin{matrix}(y')^2=0\\ 4y^2=0\end{matrix}\right\} y'=y=0$$

$y=0$ جواب منحصر به فرد

مثال: $y' + \ln y - 1 = 0$ مرتبه چند است؟ یک

مثال: $(1+\ln y)dy + (1+\ln x)dx = 0$ جواب معادله دیفرانسیل؟

$$(1+\ln x)dx = -(1+\ln y)dy \to \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\ln x)}{-(1+\ln y)} \xrightarrow{\int}$$

$$\int(1+\ln x)dx + \int(1+\ln y)dy = C$$

$$\int(1+\ln x)dx = \cancelto{x}{\int dx} + \int \ln x\,dx \to \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\ln x = u \xrightarrow{'} \frac{1}{x}dx = du$$

$$dx = dv \to x = v \qquad \rightsquigarrow \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x$$

جواب $\to y = f(x) \to x\ln x + y\ln y = C \to y\ln y = C - x\ln x$

ادامه به عهده دانشجو؟...

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

تمرین: معادله $y' = -\dfrac{x+2y}{y}$ ، $y(1)=1$ را حل کنید

معادله دیفرانسیل همگن است زیرا هردو همگن و از یک درجه باشند

$y = vx$

$y' = xv' + v \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = x\,dv + v$

$x\dfrac{dv}{dx} + v = -\left(\dfrac{x+2vx}{vx}\right) \rightarrow x\dfrac{dv}{dx} + v = \dfrac{-x}{vx} - \dfrac{2vx}{vx} \rightarrow$

$x\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{1}{v} - 2 - v \longrightarrow -x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{(1+2v+v^2)}{v} = \dfrac{(1+v)^2}{v}$

$\rightarrow -\dfrac{1}{x}dx = \dfrac{v}{(1+v)^2}dv \xrightarrow{\int} -\ln x + C = \int \dfrac{v}{(1+v)^2}dv$

$-\ln x + C = \dfrac{1}{2}\ln(1+v)^2 \rightarrow -\ln x + c = \ln(1+v) \rightarrow e^{\ln x + C} = 1+v$

$y = vx \rightarrow e^{-\ln x + C} - 1 = \dfrac{y}{x} \quad \left\{ v = \dfrac{y}{x} \rightarrow x e^{-\ln x + C} - x\right.$

مثال: $\underbrace{(1-xy)^{-2}}_{M}dx + (\underbrace{y^2 + x^2(1-xy)^{-2}}_{N})dy = 0$ ، $y(4) = 1$ را بدست آورید.

$M_y = 2x(1-xy)^{-3}$

$N_x = 2x(1-xy)^{-2} + x^2(2y(1-xy)^{-3}) \rightarrow (1-xy)^{-3}(2x + 2x^2y(1-xy))^{-3}$

$= (1-xy)^{-3}(2x - 2x^2y + 2x^2y) = 2x(1-xy)^{-3}$

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

تمرین: آیا $\frac{1}{x^2+y^2}$ عامل انتگرال ساز $(2x^2+2y^2+x)dx+(x^2+y^2+y)dy=0$ هست یا خیر؟؟

$$(2x^2+2y^2+x)dx\cancel{+(x^2+y^2+y)dy}=0-(x^2+y^2+y)dy \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x^2+2y^2+x}{-x^2-y^2-y} \rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=$$

Subject :

Year. Month. Date. ( )

$3u^2+1$

جواب هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

(۱) $y(x^2-xy+y^2)+xy'(x^2+xy+y^2)=0$

$$y(x^2-xy+y^2) = -x\frac{dy}{dx}(x^2+xy+y^2) \qquad \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx}+u$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-y(x^2-xy+y^2)}{x(x^2+xy+y^2)} \longrightarrow x\frac{du}{dx}+u = \frac{-ux(x^2-x^2u+x^2u^2)}{x(x^2+x^2u+x^2u^2)}$$

$$\longrightarrow \frac{-u\cancel{x}x^2(1-u+u^2)}{x^2(1+u+u^2)} \longrightarrow \frac{-u+u^2-u^3}{1+u+u^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{-u+u^2-u^3}{1+u+u^2}-u \longrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{-u+u^2-u^3-u-u^2-u^3}{1+u+u^2}$$

$$\longrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{-2u^3-2u}{1+u+u^2} \longrightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{1+u+u^2}{-2u^3-2u}du \longrightarrow -2\ln x + C = \frac{1+u+u^2}{u(u^2+1)}$$

$$\int -2\frac{dx}{x} = \int\frac{1+u+u^2}{u^3+u}du$$

$$\longrightarrow -2\ln x + C = \frac{1+u+u^2}{u(u^2+1)} \longrightarrow -2\ln x + C = \left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$\longrightarrow -2\ln x + C = \int\frac{1}{u}du + \int\frac{1}{u^2+1}du \longrightarrow -2\ln x + C = \ln u + \tan^{-1}u$$

$$-2\ln x + C = \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

(۲) $xy' = y+\sqrt{x^2+y^2}$ آیا همگن هست یا نه؟ و حل آن را بنویسید.

$$xy'-y-\sqrt{x^2+y^2}=0 \longrightarrow x\frac{dy}{dx} = y+\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \underbrace{x}_{N}dy = (\overbrace{y+\sqrt{x^2+y^2}}^{M})dx$$

$N(\lambda x,\lambda y)=\lambda x$ همگن از درجه ۱

$M(\lambda x,\lambda y) = \lambda y + \lambda\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \lambda(y+\sqrt{x^2+y^2})$ همگن از درجه ۱

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \longrightarrow x\frac{du}{dx} + u = \frac{ux + \sqrt{x^2 + u^2x^2}}{x}$$

$$\longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du \longrightarrow \ln x + C =$$ به عهده دانشجو ...

$$\underbrace{(x + \sin y)}_{N(x,y)}dy + \underbrace{(y + \cos x)}_{M(x,y)}dx = 0$$ ③

$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda \sin y$

$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda y + \lambda \cos x$

همگن نیست

$$\left.\begin{matrix} M_y = 1 \\ N_x = 1 \end{matrix}\right\} \longrightarrow M_y = N_x$$ کامل ✓

جواب $\rightarrow \int M(\text{سوای جملات } y\text{ دار})\,dx + \int N\,dy = C \rightarrow \int \cos x\,dx + \int (x + \sin y)\,dy = C$

$$\rightarrow \sin x + xy - \cos y = C$$

POCO X3 PRO

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

$f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x+a) - f(x)}{x-a}$ با توجه به فرمول $(\cot x)' = -\sin x$ و $(\sin x)' = \cos x$ بدست آورید +

تا ساعت ۸:۳۰

۴ تمرین: $\underbrace{\left(\dfrac{3-y}{x^2}\right)}_{N} dx + \underbrace{\left(\dfrac{y^2 - 2x}{xy^2}\right)}_{M} dy = 0$ حل کنید.

۵ تمرین: $\underbrace{(x^4 + 2y)}_{N} dx - \underbrace{x}_{M}\, dy = 0$ حل کنید.

$\left.\begin{array}{l} M_y = 2 \\ N_x = -1 \end{array}\right\}$ کامل × ⟵ همگن ×

$(x^4 + 2y)\,dx = x\,dy \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^4 + 2y}{x} \rightarrow$

$\dfrac{dy}{dx} = x^3 + \dfrac{2y}{x} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} \underbrace{- \dfrac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x^3}_{q(x)}$

$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} \rightarrow e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2\int \frac{1}{x} dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$

$y = \dfrac{1}{\mu(x)} \left(\int q(x) \cdot \mu(x)\, dx + C \right) \rightarrow y = \dfrac{1}{x^{-2}} \left(\int x^3 \cdot \dfrac{1}{x^2}\, dx + C \right)$

$\rightarrow y = x^2 \left(\dfrac{x^2}{2} + C \right) \rightarrow \boxed{\dfrac{x^4}{2} + Cx^2}$

MOHASSEL

تمرین ۶ : $\cos x \frac{dy}{dx} = 2 + 2y \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+2y\sin x}{\cos x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\cos x} + \frac{2y\sin x}{\cos x} \rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sec x + 2y\tan x \rightarrow \frac{dy}{dx} - 2y\tan x = 2\sec x \rightarrow$$

$$\mu(x) = e^{\int -2\tan x\,dx} = e^{-2\int \tan x\,dx} = e^{2\ln(\cos x)} = e^{\ln(\cos x)^2} = \cos^2 x$$

$y =$

تمرین ۷ : $y' = y + 3x^2 e^x$

$$\frac{dy}{dx} = y + 3x^2 e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} \underbrace{-1}_{p(x)} y = \underbrace{3x^2 e^x}_{q(x)}$$

$$\mu(x) = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$$

$y =$

جواب آخر

$$= e^x(x^3 + C)$$

تمرین ۸ : $(y - x + xy \cot x)dx + x\,dy = 0$

$$\mu(x) = x\sin x$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)\,dx + C\right) \rightarrow = \frac{1}{x\sin x}\left(\int x\sin x\,dx + C\right) \rightarrow$$

$$y = \frac{1}{\sin x}(-x\cos x + \sin x + C)$$ ← جواب آخر

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

$u = x \qquad dv = \sin x\,dx \qquad u \cdot v - \int v\,du = x\cos x + \int \cos x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$= -x\cos x + \sin x + C$

تمرین ⑨ : $y' = \frac{dy}{dt} - y^{3} = \frac{y}{a+t} \qquad y(0) = 1$

$\boxed{n = 3}$

$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{a+t} = y^{3} \xrightarrow{\times y^{-3}} \frac{dy}{dt} \times y^{-3} - \frac{y}{(a+t)\,y^{-3}} = 1$

$\rightarrow u = y^{1-n} \rightarrow u = y^{-2} \rightarrow -2y^{-3}y' = u' \rightarrow \frac{-2y^{-3}y'}{-2} + (y^{-2})\left(-\frac{1}{a+t}\right) = 1$

POCO X3 PRO

Scanned with CamScanner

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال : معادلات جداپذیر زیر را حل کنید.

الف) $y' = \frac{x+1}{y^4+1}$ ب) $xy' + y - y^2 = 0$

الف) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1} \rightarrow dy(y^4+1) = dx(x+1) \xrightarrow{\int}$

$\frac{y^5}{5} + y = \frac{x^2}{2} + x + 2$

ب) $x\frac{dy}{dx} + y - y^2 = 0 \rightarrow x\frac{dy}{dx} = y^2 - y \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y^2-y} \rightarrow$

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2-y} \xrightarrow{\int} \ln x + C =$ به عهده دانشجو...

مثال: معادلات همگن زیر را حل کنید.

الف) $y' = \frac{xy}{x^2-y^2}$ همگن ب) $y' = \frac{y\cos x}{1+2y^2} \longrightarrow$ تفکیک پذیر

الف)

ب) $\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x}{1+2y^2} \rightarrow (\cos x)\,dx = \left(\frac{1+2y^2}{y}\right)dy \rightarrow \sin x + C = \ln y +$

POCO X3 PRO

Subject :

Year. Month. Date. ( )

د) $y' = -\dfrac{4x + 3y + 15}{2x + y + 7}$

و) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$

Scanned with CamScanner

Year. Month. Date. ( )

مثال: معادلات دیفرانسیل کامل زیر را حل کنید.

الف) $(2xy+x)\,dx+(x^2+y)\,dy=0$

ب) $ye^{xy}\,dx+xe^{xy}\,dy=0$

$M_y=e^{xy}+xye^{xy}$, $N_x=e^{xy}+xye^{xy}$ $\rightarrow M_y=N_x$ کامل ✓

ج) $(1+e^{2\theta})\,dp+2pe^{2\theta}\,d\theta=0$

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

$\mu(x) = e^{\int 1\, dx} = e^{x}$

مثال: معادلات دیفرانسیل مرتبه زیر را حل کنید

الف) $\underbrace{y' + y}_{P(x)} = \underbrace{\frac{1}{e^{2x}+1}}_{q(x)}$

$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{x}$

$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int P(x)\mu(x)\,dx\right)$

ب) $y' + y = 2xe^{-x} + x^{2}$

$y = \frac{1}{e^{x}}\left(x^{2}e^{x} - 2xe^{x} - 2e^{x} + C\right) \rightarrow x^{2} - 2x - 2$

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

$\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = x$

تست کنکور ارشد: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{xy'-y}{x^2}+\frac{y}{x}=e^x$ را بیابید.

$\frac{xy'}{x^2}-\frac{1}{x^2}y+\frac{1}{x}y=e^x \rightarrow \frac{\frac{1}{x}y'+\frac{-1+x}{x^2}y}{\frac{1}{x}}=\frac{e^x}{\frac{1}{x}} \rightarrow y'+\underbrace{\frac{\overbrace{-x+x^2}^{x(-1+x)}}{x^2}}_{P(x)}y=\underbrace{xe^x}_{q(x)}$

$\underbrace{\frac{-1+x}{x^2}}_{P(x)}y=\underbrace{e^x}_{q}$

$\mu(x)=e^{\int P(x)dx} \rightarrow e^{\int\frac{-1+x}{x}dx} \rightarrow e^{\int\frac{-1}{x}+1dx} \rightarrow e^{-\ln x+x}=e^{\ln x^{-1}}.e^{x}=\frac{1}{x}e^x$

$y=\frac{1}{\frac{1}{x}e^x}\left(\int\frac{1}{x}e^x.xe^{-x}dx+C\right) \rightarrow xe^{-x}(x+C)$

تست کنکور: جواب معادله $(4x+xy^2)dx+(y+x^2y)dy=0$ را بیابید.

کامل

$2x^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}\right)y^2=C$

Year. Month. Date. ( )

تست کنکور: در معادله دیفرانسیل $(x+y)dx+(x-y)dy=0$ اگر $y(1)=1$ باشد

$y(0)$ کدام است؟

$M_y = 1$ کامل

$N_x = 1$

مثال: معادلات برنولی زیر را حل کنید.

① $y' + y = y^2$

② $y' + xy = 4x\sqrt{y}$

Scanned with CamScanner

(۳) $y' - \frac{3}{x} y = x^{4} y^{\frac{1}{2}}$

مثال: معادلات ریکاتی زیر را حل کنید.

(۱) $y' = -\frac{1}{t^{2}} - \frac{y}{t} + y^{2}$

(۲) $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^{2} x - \sin^{2} x + y^{2}}{2\cos x}$

Scanned with CamScanner

Year: Month: Date: ( )

مثال: عامل انتگرال ساز هر یک از معادلات زیر را بدست آورید.

① $y' = e^{2x} + y - 1$

② $e^{x}dx + (e^{x}\cot y + 2y\csc y)dy = 0$

③ $y\,dx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$

تعیین عامل انتگرال ساز:

① فرض کنید معادله دیفرانسیل $^{*}M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ دارای عامل انتگرال سازی باشد که فقط بستگی به x دارد.

$$\boxed{g(x) = \frac{M_y - N_x}{N} \rightarrow \mu(x) = e^{\int g(x)dx}}$$

② اگر عامل انتگرال ساز * تنها به y بستگی داشته باشد

$$\boxed{g(y) = \frac{N_x - M_y}{M} \rightarrow \mu(x) = e^{\int g(y)\,dy}}$$

Year. Month. Date. ( )

مثال: عامل انتگرال‌ساز $2x(y-e^{-x^2})dx+dy=0$ را بیابید.

Scanned with CamScanner

Subject :

Year. Month. Date. ( )

$n\log_b^a = \log_b^{a^n}$ $n\log_e^a = \log_e^{a^n} = \ln^{a^n}$

مثال: عامل انتگرال ساز $y\,dx + (x + 3x^3y^4)\,dy = 0$ را بیابید.

$M_y = 1$ $N_x = 1 + 9x^2y^4$

$N.y = xy + 3x^3y^5$ $M.x = xy$

$$g(z) = \frac{M_y - N_x}{N.y - M.x} = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} - 9x^2y^4}{\cancel{xy} + 3x^3y^5 - \cancel{xy}} = \frac{-3}{xy}$$

$$\mu(z) = e^{\int g(z)\,dz} \rightarrow e^{\int \frac{-3}{xy}\,dz} \boxed{= e^{-3\ln z}} = e^{\ln z^{-3}} \boxed{= z^{-3}} = (xy)^{-3}$$

$\frac{1}{x^3y^3}$

ضرب عامل انتگرال ساز $\rightarrow \frac{\cancel{y}}{x^3y^{\cancel{3}\,2}}dx + \left(\frac{x}{x^3y^3} + \frac{3\cancel{x^3}y^4}{\cancel{x^3}y^3}\right)dy = 0$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{1}{x^3y^2}}_{M}dx + \left(\underbrace{\frac{1}{x^2y^3} + 3y}_{N}\right)dy = 0$$

$$M_y \Rightarrow \left(\frac{1}{x^3y^2}\right)_y = \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{y^2}\right) \rightarrow \frac{1}{x^3} \times \frac{-2}{y^3} = \frac{-2}{x^3y^3}$$

$N_x \Rightarrow$

$$\rightarrow \int \frac{1}{x^3y^2}\,dx + \int 3y\,dy = C \rightarrow \frac{1}{y^2}\int x^{-3}dx + 3\int y\,dy = C$$

$$\rightarrow \frac{1}{y^2}\,\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{3y^2}{2} = C \rightarrow \boxed{\frac{1}{-2y^2x^2} + \frac{3y^2}{2} = C}$$

Subject :
Year. Month. Date.

جواب ← سوال امتحان ← $\tan(\tan^{-1} x+c)$
تعریف‌ها ۲ نمره ←
روش حل‌ها ←
ستاره‌دار

مثال: درجه و مرتبه هر یک از معادلات زیر را تعیین کنید.

① $(y')^{\frac{1}{3}} + (1+y'')^{\frac{1}{2}} = 0$ مرتبه = ۲ درجه ت.ن

② $y' - \ln y - 1 = 0$ مرتبه = ۱ درجه = ت.ن

③ $(y')^3 + xy' = y$ مرتبه = ۱ درجه = ت.ن

مثال: معادله دیفرانسیل خانواده دو پارامتری $y = \ln^{\cos}\underbrace{(x - C_1)}_{u} + C_2$ را بیابید.

$\rightarrow y' = \ln u \rightarrow y' = \frac{u'}{u} \rightarrow \frac{1 - \sin u}{\cos u} = \frac{1}{\cos u} - \frac{\sin u}{\cos u}$???

$\tan u$

جواب نهایی $-\tan(x - C_1)$

$y' = -\tan(x - C_1)$
$y'' = \sec^2(x - C_1)$
$y'' = 1 + \tan^2(x - C_1) \longrightarrow y'' = 1 + (y')^2$

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $y' = e^{y-x} \sin x$ را بیابید.
تفکیک پذیر است زیرا تفکیک میشود.

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{e^x} \sin x \longrightarrow \frac{dy}{e^y} = \frac{\sin x}{e^x} dx$

$\xrightarrow{\int} \int \frac{1}{e^y} dy = \int \frac{\sin x}{e^x} dx \longrightarrow -\int e^{-y} dy = \underbrace{\int e^{-x} \sin x \, dx}_{①} = -e^{-y}$

$I = -e^{-x} \sin x + \underbrace{\int e^{-x} \cos x \, dx}_{②}$ $\quad \{ \; II = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx$

① $\sin x = u \longrightarrow \cos x \, dx = du$
$e^{-x} dx = dv \xrightarrow{\int} -e^{-x} = v$

② $u = \cos x \rightarrow -\sin x \, dx = du$
$dv = e^{-x} dx \rightarrow -e^{-x} = v$

POCO X3 PRO

Subject :

Year. Month. Date. ( )

سوال : توضیح دهید جواب معادله دیفرانسیل برنولی چگونه بدست می‌آید.

براساس توضیح درسنامه قسمت معادله دیفرانسیل برنولی بدست می‌آید.

سوال : جواب عمومی مرتبه معادله دیفرانسیل خطی ← برای خودمون

سوال : مسئله مقدار اولیه $y(1)=1$ $\quad y'=-\frac{x+2y}{y}$ را حل کنید

(معادله دیفرانسیل همگن است)

$y = ux$

$y' = x\,du + u\,dx$

$$\to x\frac{du}{dx}+u=-\frac{x+2ux}{ux} \to x\frac{du}{dx}=-\frac{1+2u}{u}-u$$

$$\to -x\frac{du}{dx}=\frac{1+2u}{u}-u \to -x\frac{du}{dx}=\frac{1+2u}{u}+\frac{u}{1}$$

$$\to x\frac{du}{dx}=\frac{1+2u+u^2}{u} \to -\frac{1}{x}dx=\frac{u}{(1+u)^2}du \xrightarrow{\int}$$

$$\to -\ln u + C = \int\frac{u+1-1}{(1+u)^2} \to \boxed{-\ln x + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)^2-\frac{1}{1+\frac{y}{x}}}$$ ادامه صفحه بعد

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2(u+2)}{(1+u)^2}du-\boxed{\int\frac{1}{(1+u)^2}du}=\frac{1}{2}\ln(1+u)^2-\boxed{\frac{1}{u+1}}$$

$$\int\frac{1}{(1+u)^2}du=\frac{-1}{1+u}$$

$1+u=t \to du=dt$

$$\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt$$

Scanned with CamScanner

Subject : $\boxed{\log_b^{a} + \log_b^{c} = \log_b^{ac}}$

Year. Month. Date. ( )

$$\ln\left(1+\frac{y}{x}\right) + \ln x - \frac{1}{1-\frac{y}{x}} = C \rightarrow \ln(x+y) - \frac{x}{x+y} = C$$

$$\rightarrow \ln r - \frac{1}{r} = C$$

Scanned with CamScanner