تعریف آمار

- روش علمی است که برای جمع آوری، تلخیص، تجزیه و تحلیل، تفسیر و بطور کلی برای مطالعه و بررسی مشاهدات بکار گرفته می شود
- از فنون آماری در مدیریت برای چه مقاصدی استفاده می شود ؟
- ۱- برای تبدیل داده ها به اطلاعات
- ۲- برای بررسی صحت و سقم فرضیات
- ۳- برای تعیین اعتبار و پایایی تحقیقات

تعریف جامعه

- جامعه بزرگترین مجموعه از موجودات است که در یک زمان معین، مطلوب ما قرار می گیرند مثل جامعه فرهنگیان ایران و . . .

جامعه آماری

- تعدادی از عناصر مطلوب مورد نظر که حداقل دارای یک صفت مشخصه باشند

صفت مشخصه

- صفتی است که بین همه عناصر جامعه آماری مشترک و متمایز کننده جامعه آماری از سایر جوامع باشد

انواع جامعه آماری

- ۱- محدود : یعنی جامـعه مقادیر از تعـداد محدود و ثابتی تشکیل شده و پایان پذیر باشد
- ۲- نا محدود : یعنی جامعه از یک ردیف بی انتهایی از مقادیر تشکیل شده باشد

تعریف نمونه

- نمونه عبارتست از تعداد محدودی از آحاد جامعه آماری که بیان کننده ویژگی های اصلی جامعه باشد

انواع شاخص های آماری

- ۱- پارامتر (**parameter**) : شاخص هایی که از طریق سرشماری (اندازه گیری تمامی عناصر جامعه آماری) بدست می آیند
- ۲- آماره (**sample statistic**) : شاخص هایی که از طریق نمونه گیری (اندازه گیری بخشی از جامعه) بدست می آیند

- آمار توصیفی
- محاسبه مقادیر و شاخص های جامعه آماری با استفاده از سرشماری تمامی عناصر آن، بعبارتی توصیف کل جامعه از طریق محاسبه پارامترها
- آمار استنباطی
- محقق ابتدا آماره ها را محاسبه و سپس به کمک تخمین و آزمون فرض آماری، آنها را به پارامترهای جامعه تعمیم می دهد

انواع متغیرها

- متغیر مستقل
  - به علت احتمالی یا فرضی متغیر وابسته، متغیر مستقل یا متغیر درونداد و به عبارتی محرک گفته می شود
- متغیر وابسته
  - به متغیری که به تبع تغییر متغیر مستقل، مقدارش کم و زیاد می شود متغیر وابسته، متغیر پاسخ و یا برونداد اطلاق می شود

مقیاس های اندازه گیری متغیر ها

- ۱- مقیاس اسمی — *Nominal scale*
- ۲- مقیاس ترتیبی — *Ordinal(Rank) scale*
- ۳- مقیاس فاصله ای — *Interval scale*
- ۴- مقیاس نسبی — *Ratio scale*

NOIR

- ## مقیاس اسمی
- *صرفاً برای طبقه بندی اشیاء، اشخاص و یا خصوصیات استفاده میشود. سهام شرکت سیمانی، سهام شرکت خودرویی، ...*
- ## مقیاس ترتیبی
- *اگر بین اسامی ایجاد شده یا طبقات یک نوع رابطه هم وجود داشته باشد، یعنی قابل مرتب سازی باشند، از مقیاس ترتیبی استفاده می نمایند. سهام شرکتهای کوچک، سهام شرکتهای متوسط، سهام شرکتهای بزرگ*

مقیاس فاصله ای

- فاصله بین اعداد یا طبقات یکسان باشد. نقطه صفر اختیاری و قراردادی است. دما بر حسب سانتیگراد،
  - ۴۰ درجه سانتیگراد به اندازه ۱۰ درجه سانتیگراد بالاتر از ۳۰ درجه سانتیگراد است

مقیاس نسبی

- مقیاسی است که علاوه بر داشتن همه خصوصیات مقیاس فاصله ای، دارای نقطه صفر واقعی نیز هست، مثل قیمت سهام، گرم
  - ۲۰۰ گرم دو برابر ۱۰۰ گرم است و از آن ۱۰۰ گرم نیز سنگینتر است

- هدف این فصل آشناسازی دانشجویان با پارامترهای مرکزی و پراکندگی در جوامع کوچک ($\mathcal{N} \leq ۲۰$) می باشد

- شاخص های عددی

- اعدادی هستند که به منظور بیان کمی توزیع اندازه ها از آن استفاده می شود . این شاخص ها توصیف کننده مجموعه داده ها می باشند

- پارامتر مرکزی

- به هر معیار عددی که معرف مرکز مجموعه داده ها باشد، پارامتر مرکزی اطلاق می شود یعنی همان مقدار نماینده ای که مشاهدات در اطراف آن توزیع شده اند

مهمترین پارامترهای مرکزی

- ۱- میـانگین ؛ شامـل میانـگین حسـابی، میانگین هندســی، میانگین هارمـونیـک
- ۲- مد (نما)
- ۴- میانه (Median)

میانگین حسابی ساده

- این میانگین از تقسیم مجموع مشاهدات بر تعداد آنها بدست می آید
- فرمول میانگین حسابی جامعه

$$\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}$$

- فرمول میانگین حسابی نمونه

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}$$

میانگین حسابی موزون

- اگر هر یک از مشاهدات دارای تکرار باشند، در این صورت تعداد تکرارها بعنوان وزن مشاهدات تلقی شده و آنها را با w_i نشان می دهند

$$\mu_w = \frac{\Sigma W_i X_i}{N}$$

- نحوه دیگر نمایش

$$\bar{X}_w = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \ldots + w_n R_n$$

- که در آن $R1$ و $R2$ و ... نرخهای بازدهی پرتفولیوهای ۱ و ۲ و ... و $w1$ و $w2$ نیز وزن پرتفولیوها در کل سبد می باشند.

- $w1 + w2 + \ldots + wn = 1$

میانگین هندسی ساده

- محاسبه اندازه های نسبی همانند نسبت ها، در صدها، شاخص ها و نرخ های رشد استفاده می شود

$$\mu_G = (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N)^{\frac{1}{N}}$$

- از میانگین هندسی برای محاسبه نرخهای بازدهی مرکب در دوره های مختلف استفاده می شود.

- اگر نرخهای بازدهی یکسان باشد، میانگین هندسی با حسابی یکسان خواهد بود

$$\text{Periodic } R_{\text{compound}} = [(1+R_1)(1+R_2)\ldots\ldots(1+R_n)]^{\frac{1}{n}} - 1$$

- مثال محاسبه میانگین هندسی
- یک سرمایه گذاری در سال اول دارای بازده مثبت ۵۰٪ و در سال دوم دارای نرخ رشد منفی ۵۰٪ بوده است. نرخ رشد مرکب این سرمایه گذاری به چه میزان بوده است؟

$$1+R_G=\sqrt{(1+0.5)(1-0.5)}=\sqrt{(1.5)(0.5)}=0.866$$

$$R_G=0.866-1=-0.134 \text{ or } -13.4\%$$

میانگین هارمونیک

- از این نوع، برای محاسبه میانگین مشاهداتی استفاده می شود که از مقیاس های ترکیبی همانند « کیلو در ساعت » یا « دور در ثانیه » برخوردار هستند
- این میانگین برای چند اندازه یا مقدار برابر است با عکس میانگین حسابی معکوس آن اندازه ها

$$\mu_H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

- مقادیر یکسانی (به ریال) خریداری N بار سهام که در آن Xi قیمت سهام می باشد.

$$\mu_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

- مثال: سرمایه گذاری اقدام به خریداری یک میلیون تومان سهام شرکت الف به قیمت ۲۰ تومان در انتهای ماه اول و خریداری یک میلیون تومان همان سهام به قیمت ۲۵ تومان در انتهای ماه دوم می نماید. متوسط قیمت خرید شخص چقدر است؟

- مثال: سرمایه گذاری اقدام به خریداری یک میلیون تومان سهام شرکت الف به قیمت ۲۰ تومان در انتهای ماه اول و خریداری یک میلیون تومان همان سهام به قیمت ۲۵ تومان در انتهای ماه دوم می نماید. متوسط قیمت خرید شخص چقدر است؟

- قیمت میانگین خرید مستقل از حجم خرید است.

$$\frac{2}{1/20 + 1/25} = \$22.22$$

مثال: میانگین حسابی، هندسی و هارمونیک را برای سه داده ۲، ۳ و ۴ محاسبه نمایید؟

Arithmetic: $$\frac{2+3+4}{3}=3$$

Geometric: $$\sqrt[3]{2\times 3\times 4}=2.88$$

Harmonic: $$\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=2.77$$

- مثال: سبد سرمایه گذاری آقای خاوری در ابتدای سال عبارت بوده است از ۴ میلیون تومان پول نقد، ۶ میلیون اوراق مشارکت و ۱۰ میلیون تومان سهام شرکتها.
- در صورتیکه بازدهی پرتفولیوها در طی سال به ترتیب برابر ۵٪ و ۷٪ و ۱۲٪ بوده باشد، بازدهی کلی سبد در انتهای سال را محاسبه کنید؟

- سبد سرمایه گذاری آقای خاوری در ابتدای سال عبارت بوده است از ۴ میلیون تومان پول نقد، ۶ میلیون اوراق مشارکت و ۱۰ میلیون تومان سهام شرکتها.

- در صورتیکه بازدهی پرتفولیوها در طی سال به ترتیب برابر ۵٪ و ۷٪ و ۱۲٪ بوده باشد، بازدهی کلی سبد در انتهای سال را محاسبه کنید؟

Return		Weight		
5%	×	4/20	=	1.00%
7%	×	6/20	=	2.10%
12%	×	10/20	=	6.00%
				9.10%

مد (نما)

- به مقداری گفته می شود که در میان سایر مقادیر توزیع، بیشترین تکرار را داشته باشد، مد را با $\mathcal{M}o$ نشان می دهند
- یک مجموعه داده ممکن است بیش از یک مد داشته باشند (تعداد تکرار مساوی دو داده با بیشترین تکرار) یا اصلا مد نداشته باشند (عدم تکرار).
- 2,4,5,5,7,8,8,8,10,12
- مد= ۸

میانه (**Median**)

- در هر مجموعه از مقادیر، پس مرتب سازی داده ها به ترتیب صعودی یا نزولی، داده وسط میانه نام دارد

- اگر تعداد مشاهدات فرد باشد، داده وسط

- ۲, ۵, ۷, ۱۱, ۱۴ ==> میانه: ۷

- اگر تعداد داده ها زوج باشد، میانه برابر است با میانگین دو داده وسط

- ۳, ۱۰, ۹, ۲۰ ==> میانه: ۹/۵= ۲ / (۱۰+۹)

چندکها (چهارک، دهک، صدک،...)

- ٧۵٪ داده ها کمتر از چهارک سوم هستند.
- ۶٠٪ داده ها کمتر از دهک ششم هستند.
- ۵٠٪ داده ها کمتر از صدک پنجاهم هستند.

$$L_y = (n+1)\frac{y}{100}$$

- برای داده هایی با ١٧ مشاهده، صدک ٧٠ ام در مشاهده ١٢/۶ رخ می دهد.

(١ + ١٧) * ٧٠/١٠٠ =١٢/۶

پارامترهای پراکندگی

- *شاخص هایی هستند که متوسط میزان دوری و نزدیکی داده های توزیع را نسبت به میانگین شان نشان می دهند*

- ## محاسن پارامترهای پراکندگی

- *۱- کمک به توصیف واقعی تر یک سری از داده ها*

- *۲- کمک به قابلیت مقایسه دو یا چند سری از داده ها*

انواع شاخص های پراکندگی

- دامنه تغییرات
- واریانس
- انحراف معیار
- انحراف متوسط از میانگین
- ضریب پراکندگی

دامنه تغییرات (Range)

- ساده ترین شاخص پراکندگی است و با کم کردن کوچکترین مشاهده از بزرگترین آنها در یک سری توزیع بدست می آید

$$R = MAX_{X_i} - MIN_{X_i}$$

- در مجموعه داده زیر دامنه تغییرات را محاسبه نمایید.

22% 12%, -5% 15%

- پاسخ

$22\% - (-5\%) = 27\%$

- انحراف متوسط از میانگین (**Mean Absolute Deviation**)
- این شاخـص از تقسیم مجموع قدر مطلـق انحـرافات تک تک مشاهدات از میانگین شان بر تعداد مشاهدات بدست می آید

$$MAD = \frac{\sum \left| X_i - \mu_X \right|}{N}$$

- محاسن : در نظر گرفتن تغییرات کل داده ها
- معایب : ۱- نشان ندادن تأثیر انحرافات بزرگ
- ۲- بی بهره بودن از بعضی از خواص مطلوب میانگین حسابی

در مجموعه داده زیر انحراف متوسط از میانگین را محاسبه نمایید.

22% 12%, -5% 15%

پاسخ:

Mean = (15 - 5 + 12 + 22) / *4 = 11 %*

MAD = (|15 – 11| + |-5 – 11| + |12 – 11| + |22 - 11|) / *4*

= 32/4 = 8%

واریانس

- *در این شاخص پراکندگی، بر خلاف شاخص انحراف متوسط از میانگین بجای قدر مطلق از مجذور (توان ۲) انحرافات استفاده می شود*

- واریانس جمعیت

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum (X_i - \mu_X)^2}{N}$$

انحراف معیار (انحراف استاندارد)

- این شاخص به منظور برطرف کردن عیوب شاخص های قبلی است یعنی همان نشان ندادن تأثیر انحراف بزرگ توسط $\mathcal{MAD}$ و افزایش دادن تأثیر این انحراف توسط $\sigma 2$
- انحراف معیار جمعیت

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \mu_X)^2}{N}}$$

◎ در مجموعه داده زیر انحراف معیار را محاسبه نمایید.

22% 12%, -5% 15%

پاسخ:

(μ)= 11 %

$$\sigma^2 = \frac{(15-11)^2 + (-5-11)^2 + (12-11)^2 + (22-11)^2}{4} = 98.5$$

Variance: (σ^2)= 98.5

standard deviation (σ) = $\sqrt{98.5}$ = 9.9 %

خواص واریانس

- ۱- اگر تمام مشاهدات با عدد ثابت b جمع شوند، واریانس جدید تغییر نمی کند
- ۲- اگر تمام مشاهدات، به عدد ثابت b ضرب شوند، واریانس جدید b^2 برابر افزایش می یابد

واریانس و انحراف معیار نمونه

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

نابرابری چبیشف

- این رابطه حداقل درصد مشاهداتی را مشخص می کند که در K انحراف معیار از میانگین قرار می گیرند.

- نقطه قوت آن این است که برای هر مشاهده ای صادق است.

$$\boxed{\text{Min.\% is } 1-\frac{1}{k^2}}$$

$$\text{Min.\% for 2 std. dev. is } 1-\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{4}=75\%$$

ضریب پراکندگی

- ضریب پراکندگی یکی از معیارهای پراکندگی نسبی است که با فرمول زیر بیان می شود

$$CV = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

کاربردهای ضریب پراکندگی

- برای مقایسه دو جامعه در مواردی که :
- ۱- مقیاس ها یکسان نیستند
- ۲- مقیاس یکسان ولی تفاوت زیادی در بزرگی مشاهدات وجود دارد
- ۳- واریانسهای جوامع یکسان ولی میانگین هایشان متفاوت است

- آنچه که ضریب پراکندگی محاسبه می کند عبارت است از ریسک به ازاء هر واحد بازده:

Example:	Mean	Std. Dev.
Asset A	5%	10%
Asset B	8%	12%

- دارایی ب دارای انحراف معیار و بازده بالاتری است. هر چه میزان ضریب پراکندگی پایین تر باشد مطلوبتر است.

$$CV = \frac{s}{\bar{X}} \quad CV_A = \frac{10}{5} = 2 \quad CV_B = \frac{12}{8} = 1.5$$

نسبت شارپه

- بازده اضافی به ازاء هر واحد از ریسک (CV ریسک را به ازاء هر واحد بازده محاسبه می کند). پس هر چه نسبت شارپه بالاتر باشد بهتر است.

- مثال: بازده متوسط سبد برابر ۱۷٪ می باشد، انحراف معیار برابر با ۹٪ و نرخ بدون ریسک نیز برابر ۵٪ است. نسبت شارپه را محاسبه کنید؟

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{\bar{R}_P - \bar{R}_F}{\sigma_P} = \frac{17-5}{9} = 1.33$$

توزیع فراوانی (مطلق)

- یعنی جدول مرتب و خلاصه شده از داده ها و مشاهدات که تکرار وقوع هر داده ها در آن مشخص شده است

مراحل طبقه بندی داده ها

- ۱- مرتب کردن داده ها و محاسبه دامنه تغییرات (R)
- ۲- مشخص کردن تعداد طبقات (K)
- ۳- محاسبه نمودن فاصله طبقات (I)
- ۴- سازماندهی طبقات

تعیین فاصله طبقات

- فاصله طبقات از تقسیم مقدار R (دامنه تغییرات) بر مقدار محاسبه شده برای تعداد طبقات (K) به شکل زیر بدست می آید

$$I = \frac{R}{K}$$

توزیع فراوانی نسبی

- چنانچه در جدول طبقه بندی داده ها بجای فراوانی مطلق Fi ا ز فراوانی نسبی fi استفاده شود، به آن توزیع فراوانی نسبی گویند

فراوانی مطلق آن طبقه

فراوانی نسبی هر طبقه = ---------------------------

تعداد کل مشاهدات (فراوانی ها)

$$f_i = \frac{F_i}{N}$$

- به کمک این فراوانی می توان در صد تراکم داده ها را در هر طبقه مشخص نمود بعبارتی از fi جهت یافتن محل تمرکز داده ها استفاده می شود

توزیع فراوانی تجمعی

- اگر در جدول طبقه داده ها، بجای فراوانی های مطلق و نسبی از فراوانی تجمعی استفاده شود، به جدول بدست آمده، توزیع فراوانی تجمعی گویند

فراوانی تجمعی طبقه

- فـراوانی تجـمعی هر طـبقه، عـبارتست از مجموع فراوانی های مطلق از اولین طبقه تا طبقه مورد نظر که آن را با FCi نشان می دهند

$$Fc_i = \sum_{i=1} F_i$$

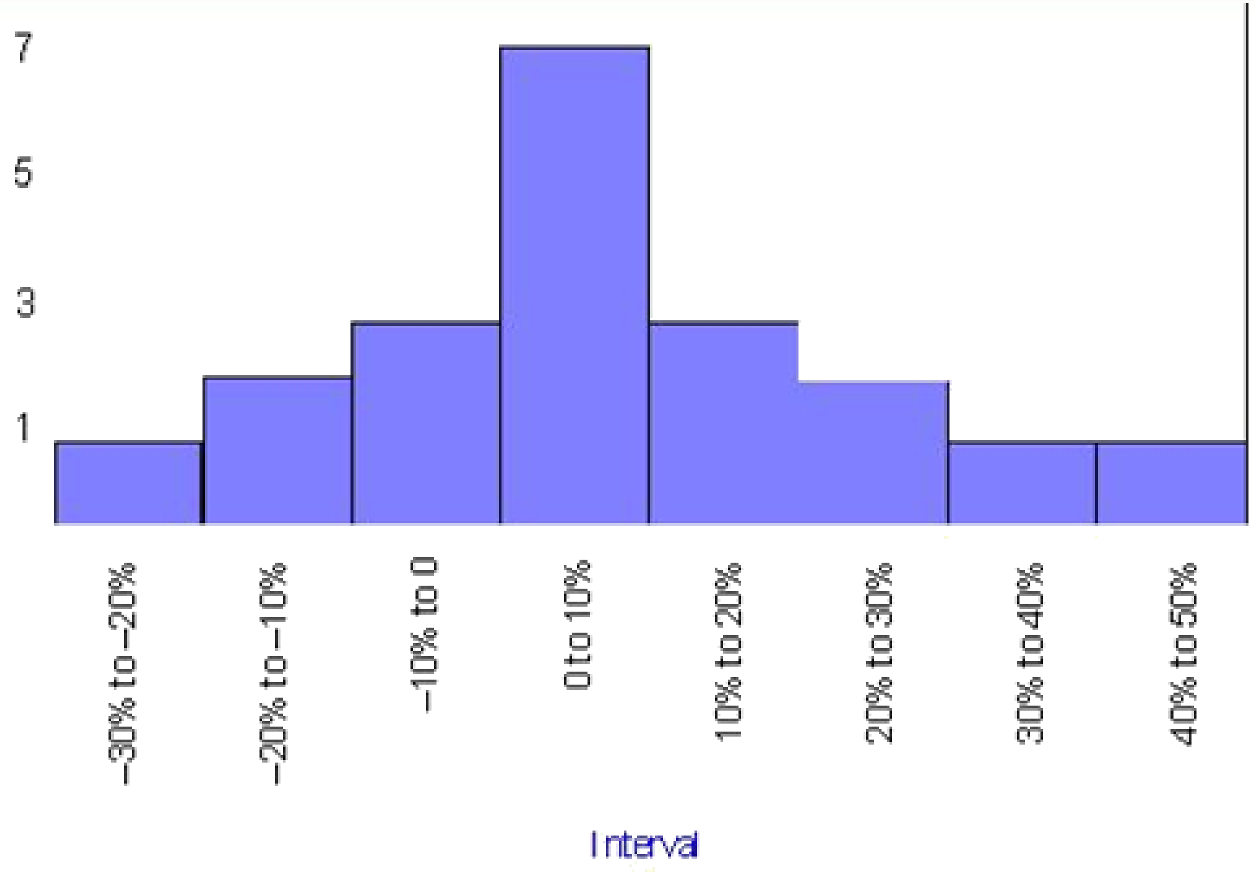
فراوانی نسبی تجمعی

- این فراوانی از تقسیم فراوانی تجمعی هر طبقه بر تعداد مشاهدات بدست می آید

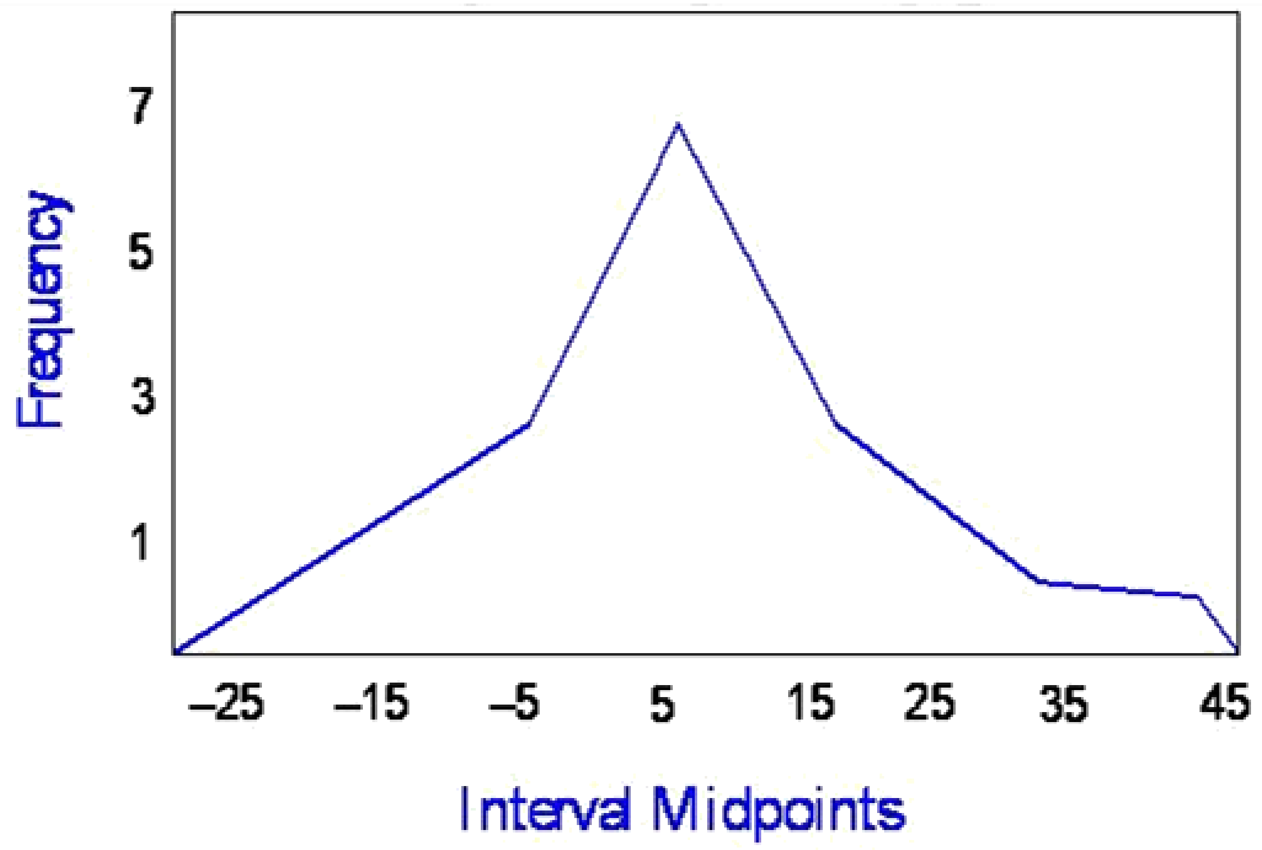
$$fc_i = \frac{Fc_i}{N}$$

- این فراوانی بیانگر در صد داده ها و مشاهدات واقع شده بین حد پایین اولین طبقه تا حد بالای طبقه مورد نظر است

◎ بافت نگار (**Histogram**)



نمودار چند ضلعی (**Frequency Polygon**)



انواع پارامترهای مرکزی در داده های طبقه بندی شده

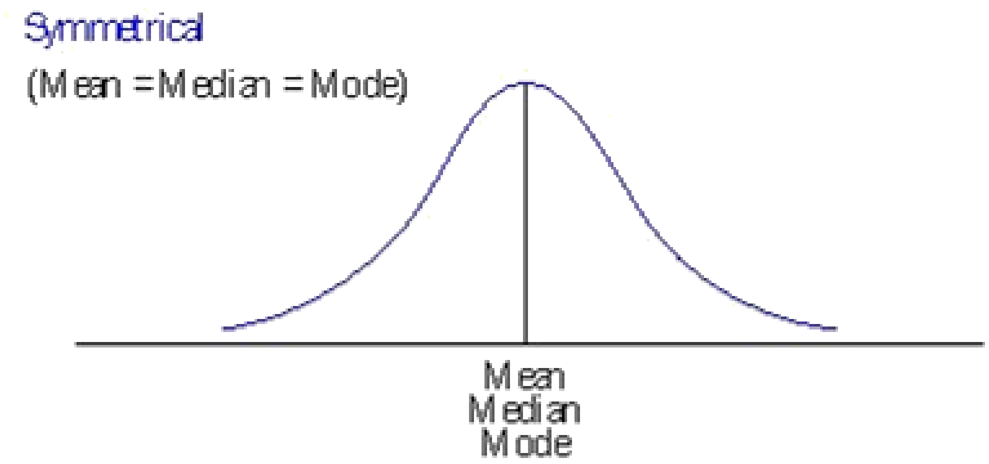
- میانگین ؛ که به روش های مستقیم و غیرمستقیم قابل محاسبه است
- مد ؛ که نشان دهنده بیشترین تکرار می باشد
- میانه؛ که مشخص کننده داده وسط است
- چندکها ؛ شامل چارکها، دهکها و صدکها

پارامترهای تعیین انحراف از قرینگی

- در هنگام مقایسه دو یا چند جامعه، در صورت مساوی بودن پارامترهای مرکزی و پراکندگی، این پارامترها با بهره گیری از ضریب چولگی کارساز خواهند بود. آنچه ضریب چولگی نشان میدهد این است که توزیع مورد بررسی تا چه حد فاقد تقارن است.
- ۱- متقارن (نرمال) : مد = میانه = میانگین
- ۲- چولـه به راسـت : مد < میانه < میانگین
- ۳- چـولـه بـه چــپ : مد > میانه > میانگین

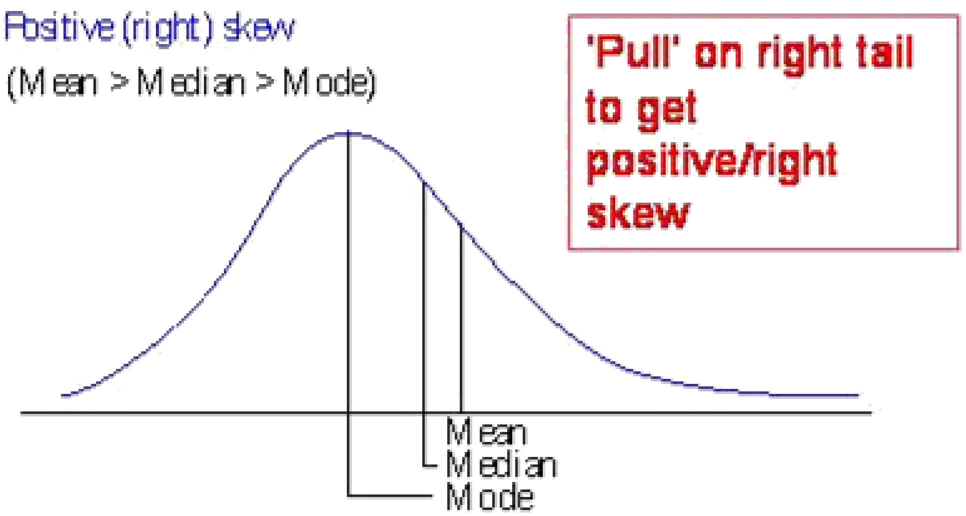
توزیع متقارن

- متقارن (نرمال) :   مد = میانه = میانگین
- ضریب چولگی = ۰



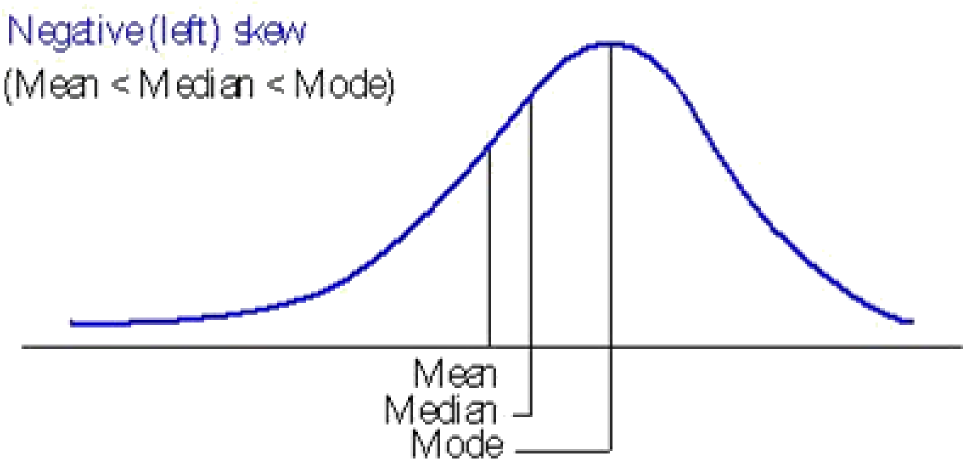
چولگی به راست

- مد < میانه < میانگین
- ضریب چولگی مثبت



چولگی به چپ

- مد > میانه > میانگین
- ضریب چولگی مثبت



مقادیر مختلف ضریب چولگی (SK)

- ۱- صفر : در صورت متقارن بودن توزیع جامعه
- ۲- مثبت : در صورت چوله به راست بودن توزیع جامعه
- ۳- منفی : در صورت چوله به چپ بودن توزیع جامعه
- اگر دم توزیع جامعه به سمت راست باشد، توزیع را چوله به راست و در صورت عکس، آن را چوله به چپ می نامند

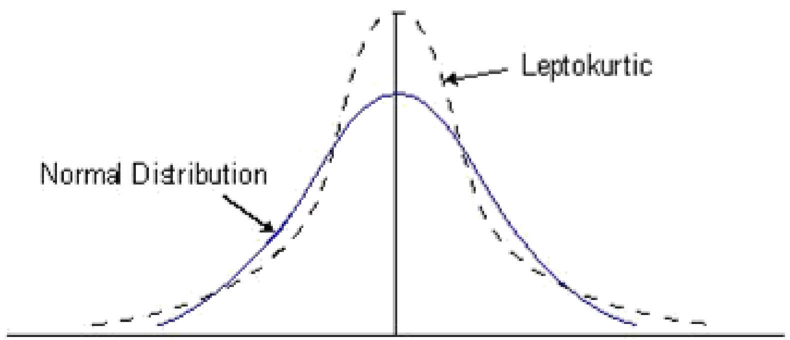
$$S_k = \left\{\frac{n}{(n-1)(n-2)}\right\} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X)^3}{s^3}$$

$$S_k \approx \left(\frac{1}{n}\right) \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X)^3}{s^3}$$

- ۱- $|SK| \le 0/1$، جامعه تقریباً نرمال
- ۲- $0/1 < |SK| \le 0/5$، تفاوت اندک با توزیع نرمال
- ۳- $|SK| > 0/5$، تفاوت فاحش با توزیع نرمال

پارامترهای تعیین انحراف از کشیدگی

- *این پارامترها برای مقایسه توزیع جوامع مورد نظر با توزیع جامعه نرمال به لحاظ کشیدگی (کوتاهی و بلندی توزیع) مورد استفاده قرار می گیرد*



کشیدگی

- کشیدگی توزیع نرمال برابر عدد ۳ است.
- انحراف کشیدگی (کشیدگی اضافی) را با E نشان می دهند و برابر کشیدگی منهای ۳ است . انحراف کشیدگی برای توزیع نرمال برابر صفر است.
- انحراف کشیدگی بیشتر از ۱، بزرگ محسوب می شود.
  - *۱- مساوی توزیع نرمال ($E=0$)*
  - *۲- بلندتر از توزیع نرمال ($E>0$)*
  - *۳- کوتاه تر از توزیع نرمال ($E<0$)*

$$K_E = \left(\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^4}{s^4} \right) - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

$$\frac{n^2}{n^3} \frac{\sum (X - \overline{X})^4}{s^4} - \frac{3n^2}{n^2} = \frac{1}{n} \frac{\sum (X - \overline{X})^4}{s^4} - 3.$$

مفهوم احتمال (P)

- احتمال یعنی شانس وقوع یک پیشامد خاص و احتمال وقوع یک پیشامد برابر است با نسبت دفعاتی که پیشامد خاصی در تکرارهای زیاد رخ می دهد

احتمال عینی و ذهنی

- – احتمال ذهنی، متغیر و وابسته به نظر اشخاص است(Subjective)
- – احتمال عینی، ثابت و مقدار آن از قبل مشخص است و به عقاید اشخاص بستگی ندارد(Empirical)

فضای نمونه

- مجموعه پیامدهای ممکن یک آزمایش را فضای نمونه آن آزمایش می گویند .
- فضای نمونه را با S نشان می دهند
  - محدود – یعنی این که فضای نمونه تعداد کمی عضو داشته باشد
  - نامحـدود – یعنی اینکه فضـای نمونه آزمایش (تعداد اعضاء آن) نامتناهی است

پیشامد

- به هر یک از زیر مجموعه های فضای نمونه، یک پیشامد گفته می شود
- پیشامدهای هم شانس یعنی این که تمام پیشامدهای دارای شانس وقوع برابر باشند
- احتمال وقوع پیشامدی مثل $\mathcal{A}$ برابر می شود با تعدادهای عضو های پیشامد $\mathcal{A}$ به تعداد عضوهای فضای نمونه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

- دوبه دو ناسازگار: هر دو با هم نمی توانند رخ دهند

پیشامد

- دوبه دو ناسازگار: هر دو با هم نمی توانند رخ دهند
- پیشامدهای وابسته: دانستن نتیجه یک پیشامد، در مورد پیشامد دیگر داده ای به دست می دهد. رشد تورم و رکود یا رونق اقتصاد
- پیشامدهای مستقل: وقوع یک پیشامد، اثری بر وقوع دیگری ندارد. شیر یا خط آمد سکه.

خواص اولیه احتمال

$$1- \qquad 0 \le P(A) \le 1$$

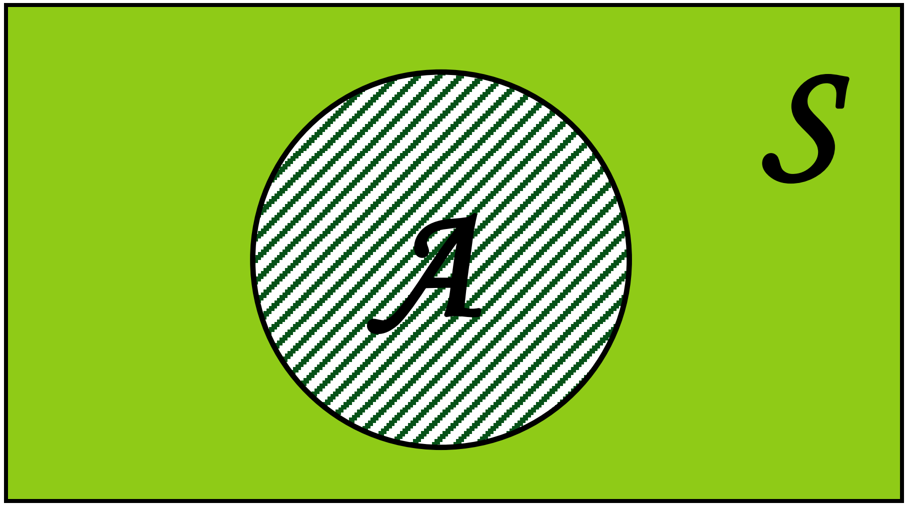
- برای مجموعه ای از پیشامدهای دوبه دو ناسازگار:

$$2- \qquad P(S) = 1$$

نمودار ون

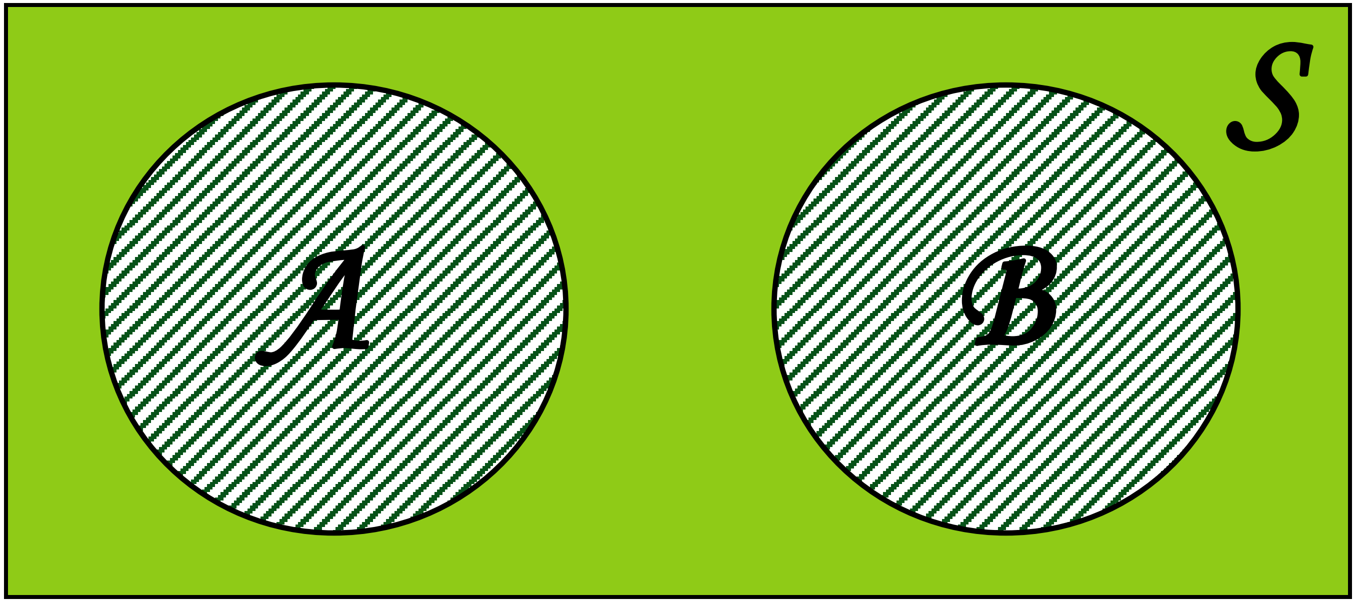
- در این نمودار به منظور نشان دادن پیشامد ها،کل فضای نمونه در قالب مستطیلی ارائه شده و هر پیشامدی قسمتی از این مستطیل را به خود اختصاص می دهد

- احتمال پیشامدی مانند A در نمودار ون



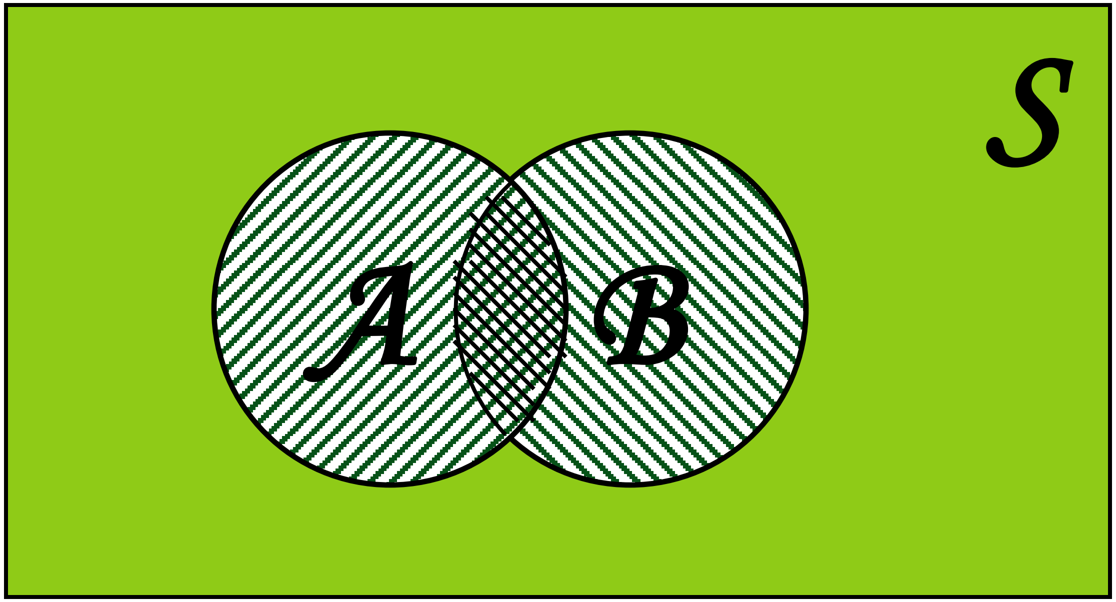
دو پیشامد نا سازگار

- دو پیشامد را در صورتی « نا سازگار » گویند که امکان وقوع همزمان نداشته باشند یعنی با وقوع یکی، دیگری امکان وقوع نداشته باشد مثل شیر و خط



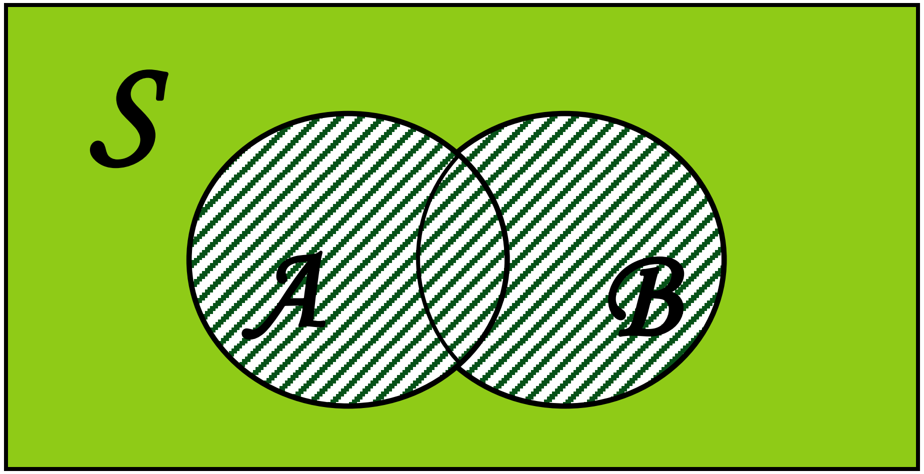
دو پیشامد سازگار

- دو پیشامدی را گویند که وقوع یکی مانع وقوع دیگری نیست بعبارتی این دو پیشامد دارای حداقل یک عضو مشترک هستند. محل تلاقی دو پیشامد، نقطه مشترک آنهاست (جائیکه دو بار هاشور خورده است)



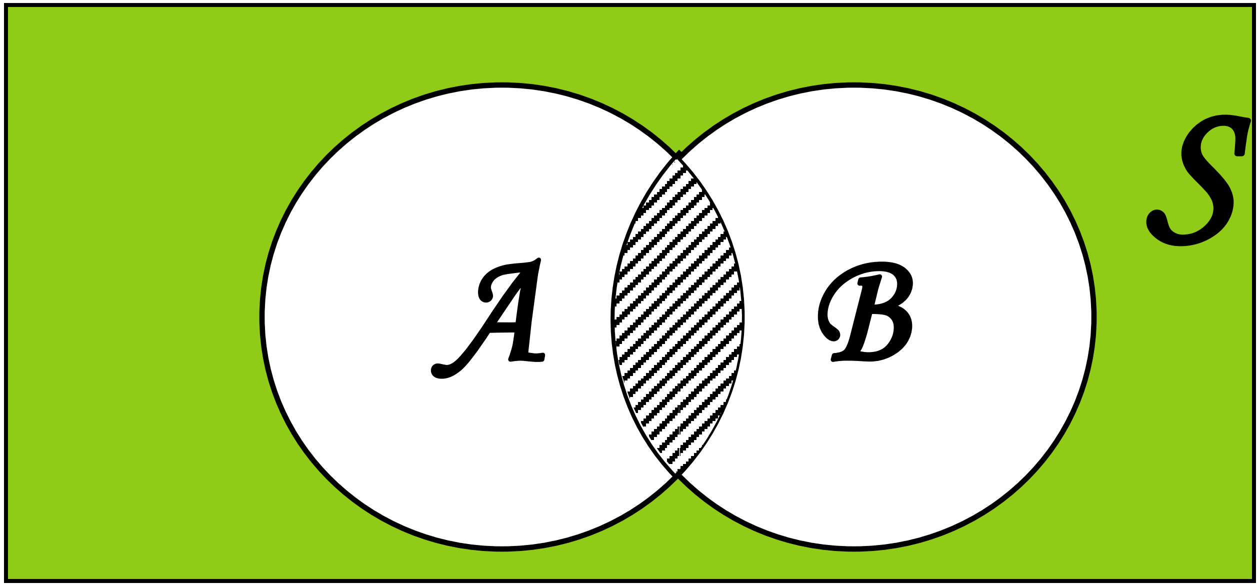
اجتماع دو پیشامد

- اجتماع دو پیشامدی مثل A و B، مجموعه تمام عضوهایی است که در A یا در B یا هم در A و هم در B قرار دارند
- اجتماع دو پیشامد A و B را با $A \cup B$ نشان می دهند. (A یا B)
  - حد اقل یکی از دو پیشامد مزبور رخ داده است



اشتراک دو پیشامد

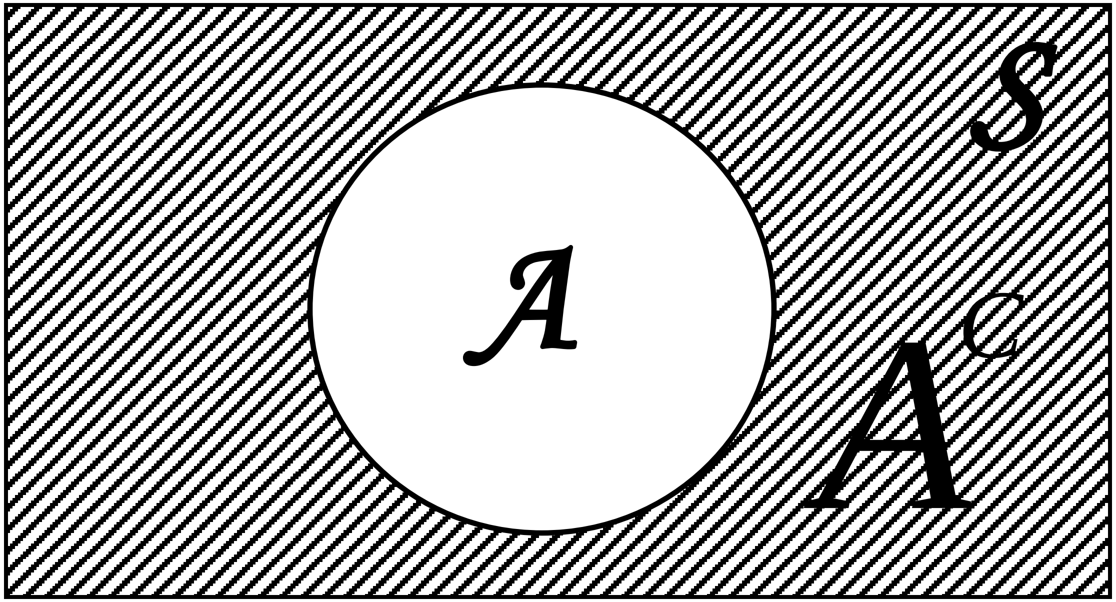
- اشتراک دو پیشامدی مثل $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ را با $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ نشان می دهند . وقوع $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ یعنی این که هر دو پیشامد $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رخ داده است



متمم یک پیشامد

- متمم پیشامدی مثل $\mathcal{A}$ که با A^C نشان داده می شود مجموعه تمام عضوهایی است که در فضای نمونه است ولی در خود پیشامد $\mathcal{A}$ نیست

- وقوع متمم به معنی عدم وقوع پیشامد $\mathcal{A}$ می باشد



قاعده متمم گیری

$$A \cup A^C = S \Rightarrow P(S) = 1 \Rightarrow P(A) + P(A^C) = 1$$

$$\Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A) \quad , P(A) = 1 - P(A^C)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- برای دوپیشامد ناسازگار

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

احتمال شرطی

- در پیشامد شرطی یا مشروط احتمال وقوع یک پیشامد به شرط وقوع پیشامد دیگر بررسی می شود

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

- شروط : ۱- وقوع A به B مربوط بوده
- ۲- B قبلاً رخ داده
- ۳- $P(B)\neq 0$

قانون ضرب احتمالات

- با استفاده از احتمـال شرطی می توان قانـون ضرب را برای محاسبه احتمال اشتراک پیشامدها بشرح زیر بیان نمود

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

دو پیشامد مستقل

- دو پیشامد را « مستقل » می گوییم، در صورتی که وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع و یا عدم وقوع دیگری هیچ تأثیری نداشته باشد

احتمال برای پیشامدهای مستقل

- چون A و B هیچ تأثیری بر روی هم ندارند برای محاسبه احتمال اشتراک آنها بشکل زیر عمل می شود :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

شروط مربوط به احتمالات

- شرط ناسازگار بودن دو پیشامد

$$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

- شرط مستقل بودن دو پیشامد

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

احتمال مشترک

- احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ بدهند، احتمال مشترک دو پیشامد نام دارد.
- احتمال افزایش نرخ بهره ۴۰٪ است.
- احتمال رکود اقتصادی در صورت افزایش نرخ بهره ۷۰٪ است.
- احتمال اینکه هم نرخ بهره افزایش یابد و هم رکود اقتصادی رخ دهد چیست؟

- $P(I) = 40\%,\ P(R|I) = 70\%$
- $P(R \sqcap I) = P(R|I) \times P(I) = 0.7 \times 0.4 = 28\%$

قاعده کلی احتمال

$$P(A) = P(A|B) + P(A| B^C)$$

$$= P(A \Pi B) * P(B) + P(A \Pi B^C) * P(B^C)$$

$$P(A) = P(A| S_1) \times P(S_1) + P(A|S_2) \times P(S_2) + .. . + P(A| S_n) \times P(S_n)$$

محاسبه احتمال نامشروط

با داشتن:

P (افزایش نرخ سود) = P(I) = 0.4

P (عدم افزایش نرخ سود) = $P(I^C)$ = 1 - 0.4 = 0.6

P (رکود | افزایش نرخ سود) = P(R|I) = 0.70

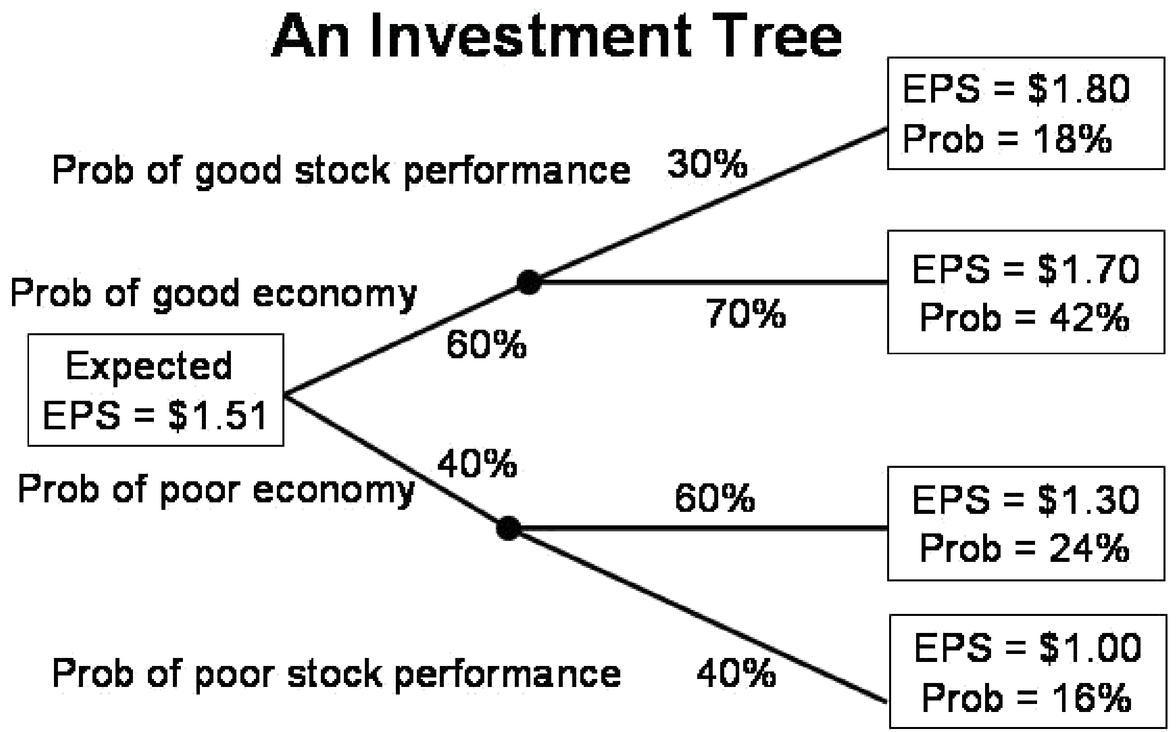
P (رکود | عدم افزایش نرخ سود) = P(RI|C) = 0.10

احتمال رکود (نامشروط) را محاسبه کنید؟

$P(R) = P(R|I) \times P(I) + P(RI|C) \times P(I^C)$

$= 0.70 \times 0.40 + 0.10 \times 0.60 = 0.34$

درخت سرمایه گذاری



◎ محاسبه امید ریاضی با توجه به قاعده کلی احتمال:

Using the probabilities from the Tree:

Expected(EPS) = \$1.51
= 0.18(1.80) + 0.42(1.70) + 0.24(1.30) + 0.16(1.00)

Conditional Expectations of EPS:
E(EPS)|good economy =
0.30(1.80) + 0.70(1.70) = \$1.73

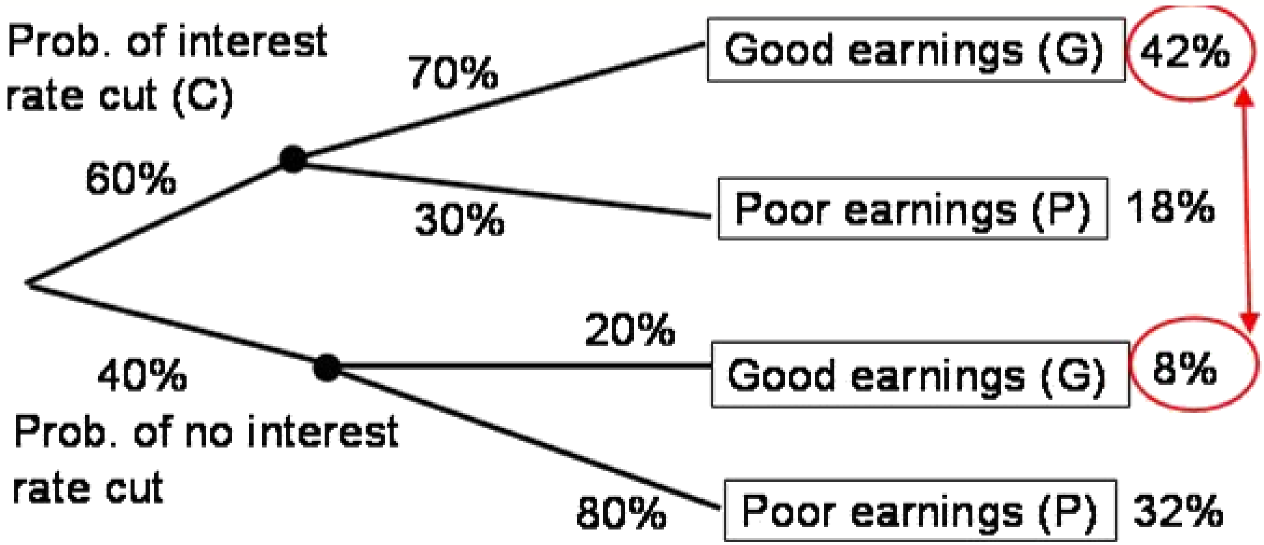
E(EPS)|poor economy =
0.60(1.30) + 0.40(1.00) = \$1.18

قضیه بیز

- این قضیه پژوهشگران را در تجدید نظر احتمالات، در صورت دسترسی به اطلاعات جدید، کمک می کند

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}$$

مثال قضیه بیز



Prob (C|G) = 42 / (42 + 8) = 42 / 50 = 84%

Prob (C|G) = [Prob(G|C) × Prob(C)]/Prob(G)

قواعد شمارش

- این قواعد عبارتند از :
- ۱- قاعده ضرب
- ۲- جایگشت (ترتیب)
- ۳- ترکیب
- از این قواعد در وضعیت هایی استفاده می شود که فهرست نمودن تمام حالات ممکن آزمایش مقدور نمی باشد، لذا فقط به ذکر تعداد حالات ممکن و مختلف اکتفا می شود

قاعده ضرب

- طرق ممکن انجام عمل در آزمایشی که مرحله اول آن به $n1$ طریق و . . . مرحله K ام آن به nk طریق انجام میگیرد، عبارت خواهد بود از :

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_K$$

- نمودار درختی

جایگشت (ترتیب)

- یعنی تعداد طرقی که می توان r شی را از بین n شی انتخاب نمود بطوریکه و ترتیب قرار گرفتن اشیاء نیز مهم باشد

حالات مختلف پیدا کردن جایگشت

- ۱- تعداد کل جایگشت های $\mathcal{N}$ شی متمایز
- ۲- تعداد کل جایگشت های $\mathcal{N}$ شی نامتمایز
- ۳- تعداد جایگشت های r شی انتخابی از بین $\mathcal{N}$ شی متمایز

- فرمول تعداد کل جایگشت های Nشی متمایز
- ۱- در صورت ردیفی بودن بشکل $n!=n\times(n-1)\times\ldots3\times2\times1$
- ۲- در صورت دایره ای بودن $(n-1)!=(n-1)(n-2)\times\ldots3\times2\times1$
- جایگشت های Nشی

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

- شروط
- ۱- از n شی، $n1$ تای آنها از یک نوع $n2$ تای آنها از نوع دیگر و ...
- ۲- $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$

- مثال: از میان ۱۰ سهم، می خواهیم ۵ سهم را خرید، ۳ سهم را نگهداری، و دو سهم را فروش مشخص کنیم. به چند طریق این کار ممکن است؟

$$\frac{10!}{5! \times 3! \times 2!} = 2,520$$

- جایگشت های rشی از بین n شی
- شروط : ۱- r و n هر دو متمایز
- ۲- $r < n$

$$P_r^n = \frac{n}{(n-r)}$$

نکات مهم در محاسبه جایگشت ها (ترتیب ها)

- ۱– توجه به تعداد اشیاء و حجم انتخابی از بین آنها
- ۲– توجه به ردیفی یا دایره ای بودن اشیاء
- ۳– توجه به متمایز یا نامتمایز بودن اشیاء

- مثال:شما دارای ۵ سهم هستید و می خواهید سه تا از آنها را یکی یکی بفروشید. ترتیب فروش سهمها مهم است. به چند طریق می توانید این کار را انجام دهید؟

$$\frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

ترکیب

- تعداد طرق انتخاب r شی متمایز از بین n شی بشرطی که ترتیب قرار گرفتن اشیاء باعث افزایش تعداد طرق نگردد

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{(n-r)}$$

- مثال: شما دارای ۵ سهم هستید و می خواهید سه تا از آنها را بفروشید. به چند طریق این کار را می توانید انجام دهید؟

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{5!}{(5-3)!\times 3!} = 10$$

متغیر تصادفی

- *تابعی است که روی فضای نمونه تعریف می شود و هر یک از مقادیر آن، متناظر با یک یا چند عضو از اعضای فضای نمونه است*

انواع متغیر تصادفی

- *۱- متغیر تصادفی گسسته ؛ با تعداد مقادیر متناهی یا شمارش پذیر*
- *۲- متغیر تصادفی پیوسته ؛ با تعداد مقادیر ممکن نامتناهی و غیر قابل شمارش*

امید ریاضی

- *امید ریاضی متغیر تصادفی X که $E(X)$ نشان داده می شود همان میانگین موزون است که احتمالات در آن، نقش ضرایب (وزن ها) را ایفاء می کنند*

کواریانس

- *معیار عددی است که نوع و شدت رابطه خطی بین دو متغیر تصادفی را نشان می دهد و عبارتست از امید ریاضی تغییرات دو متغیر بر حسب میانگین شان.*
  - *از منفی بینهایت تا مثبت بینهایت تغییر می کند در نتیجه تفسیر آن راحت نیست*

- انواع رابطه بین دو متغیر
- ۱– رابطه مستقیم : حرکت هم جهت متغیرها (کوواریانس مثبت)
- ۲– رابطه معکوس : حرکت بصورت خلاف جهت هم (کوواریانس منفی)
- ۳– عدم وجود رابطه : عدم تأثیر متغیرها بر هم (کوواریانس صفر)
- فرمول کواریانس

$$COV(X,Y) = E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$$

$$cov(R_i, R_j) = E\left[(R_i - E(R_i)) * (R_j - E(R_j))\right]$$

رابطه استقلال و کواریانس

- اگر x و y مستقل باشند، کواریانشان حتماً صفر است ولی عکس قضیه همیشه صادق نیست

همبستگی (Correlation)

- همبستگی در واقع استاندارد سازی کوواریانس است

$$Corr(R_i, R_j) = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma(R_i)\sigma(R_j)}$$

- مقادیر آن از ۱+ (هبستگی کاملا مثبت) تا ۱− (همبستگی کاملا منفی) تغییر می کند.
- برای نشان دادن آن برای جمعیت از ρ استفاده می شود.
- برای نشان دادن آن برای نمونه از r استفاده می شود.

- مثال: کوواریانس میان دو دارایی برابر با ۰/۰۰۴۶ است. انحراف معیار یک دارایی برابر با ۰/۰۶۲۳ و دیگری برابر با ۰/۰۹۹۱ است. همبستگی میان این دو دارایی چقدر است؟

$$\rho_{AB} = \frac{Cov_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{0.0046}{0.0623 \times 0.0991} = 0.745$$

مثال: امید ریاضی (ارزش مورد انتظار)، واریانس و انحراف معیار

Expected Value: $E(X) = \Sigma P(x_i)x_i$

Economy	$P(x_i)$	Return (X_i)	$P(x_i)x_i$
Recession	0.25	–0.10	–0.025
Normal	0.50	0.08	0.040
Boom	0.25	0.22	0.055
			$E(X) = 0.070$

◎ مثال: امید ریاضی (ارزش مورد انتظار)، واریانس و انحراف معیار

- **Variance**: $\sigma^2(X) = \Sigma P(x_i)[x_i - E(X)]^2$

Economy	$P(x_i)$	$Return(X_i)$	$P(x_i)x_i$	$P(x_i)[x_i - E(X)]^2$
Recession	0.25	–0.10	–0.025	0.00723
Normal	0.50	0.08	0.040	0.00005
Boom	0.25	0.22	0.055	0.00563
			$E(X) = 0.070$	$0.01290 = \sigma^2$

- **Standard deviation**: Square root of $\sigma^2 = 0.1136$

پرتفولیو

- امید ریاضی پرتفولیو میانگین موزون است که وزن هر سبد در آن، نقش ضرایب (وزن ها) را ایفاء می کنند

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$$

- واریانس و انحراف معیار پرتفولیو

$$Var(R_p) = \sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_B^2 w_B^2 + 2 w_A w_B Cov_{AB}$$

$$\text{Note}: Cov_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$

$$Var(R_p) = \sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_B^2 w_B^2 + 2 w_A w_B \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$

تابع توزیع احتمال

Joint Probability Function

Returns	$R_B = 40\%$	$R_B = 20\%$	$R_B = 0\%$
$R_A = 20\%$	0.15		
$R_A = 15\%$		0.60	
$R_A = 4\%$			0.25

$E(R_B) = 18\%$

Probabilities

$E(R_A) = 13\%$

$$Cov_{AB} = 0.15\,(0.20 - 0.13)\,(0.40 - 0.18) + 0.6\,(0.15 - 0.13)\,(0.20 - 0.18) + 0.25\,(0.04 - 0.13)\,(0 - 0.18) = 0.0066$$

توزیع دو جمله ای

- ویژگیها:
- ۱- تکرار آزمایش (n بار)
- ۲- هر آزمایشی فقط دو پیامد دارد
- ۳- ثابت بودن p و q در هر آزمایش
- ۴- مستقل بودن آزمایش ها از همدیگر

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$$

$$x = 0,1,2,\ldots,n$$

- تعداد آزمایش ها $= n$
- تعداد موفقیت های مورد نظر $= x$
- احتمال موفقیت در هر آزمایش $= p$
- احتمال شکست در هر آزمایش $= q$
- میانگین و واریانس توزیع دو جمله ای
- 1- $E(X) = np$
- 2- $V(X) = npq$
- n و p و q پارامترهای توزیع دو جمله ای هستند

توابع احتمال پیوسته

- بخاطر این که میزان احتمال در توابع پیوسته در یک نقطه معین مساوی صفر است، لذا در این گونه توابع، احتمال همیشه در قالب یک فاصله تعیین می شود

- پس علامت مساوی در این توزیع ها نقشی ایفاء نمی کند

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < x \le b) = P(a \le X \le b)$$

توزیع احتمال گسسته و پیوسته

- یک **توزیع احتمال**، احتمال تمام پیشامدهای یک متغیر تصادفی را به دست می دهد.
- **توزیع گسسته** دارای تعداد محدودی پیشامد است.
- **توزیع پیوسته** دارای تعداد نامحدودی پیشامد است.
- تعداد روزهایی که هفته بعد باران خواهد بارید یک **متغیر تصادفی گسسته** است که می تواند مقادیر {۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷} را داشته باشد.
- مقدار بارانی که هفته بعد خواهد بارید یک **متغیر تصادفی پیوسته** است.

توابع احتمال

- یک تابع احتمال(**probability function**)، **P(x)**، مقداری را به دست می دهد که یک متغیر تصادفی گسسته با دادن X به آن، به دست می دهد. برای مثال،
  - $p(x) = x\,/15$ *for* $X = \{1,2,3.4,5\} \rightarrow p(3) = 20\%$
- دو ویژگی مهم هر تابع توزیع احتمال عبارتند از:

- یک تابع چگالی احتمال(probability density function)، **f(x)**، برای محاسبه احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته مقداری را در میان دو نقطه اخذ کند به کار می رود (مشابه تابع احتمال).
- یک تابع توزیع تجمعی(cumulative distribution function)، **F(x)**، برای محاسبه احتمال اینکه یک متغیر تصادفی کمتر یا مساوی یک مقدار خاص باشد به کار می رود.

- تابع توزیع احتمال زیر را در نظر بگیرید

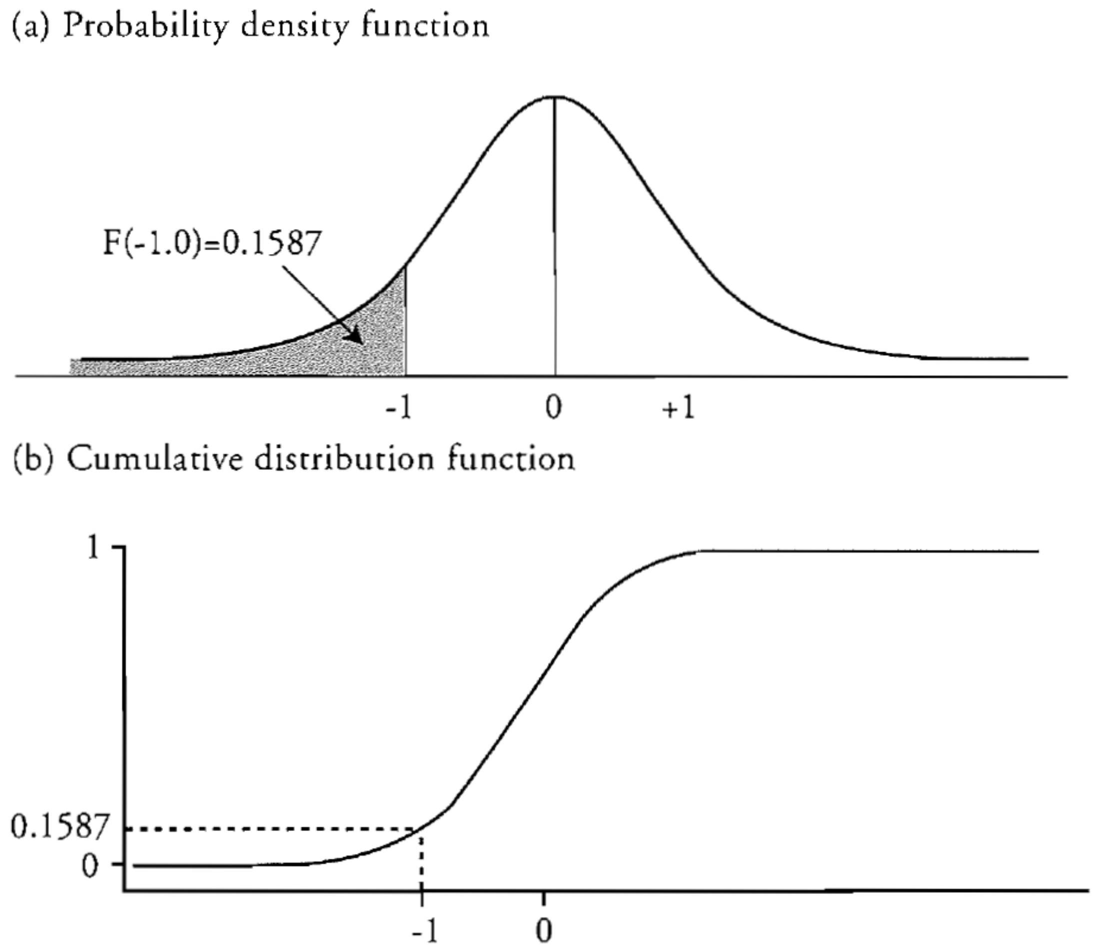
$$X = \{1, 2, 3, 4\}, p(x) = x / 10$$

- داریم:

$$F(3) = 0.6 = 0.1 + 0.2 + 0.3$$

- و:

$$F(4) = 1 = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4$$


(a) Probability density function
F(-1.0)=0.1587
-1
0
+1
(b) Cumulative distribution function
1
0.1587
0
-1
0

- بازدهی سهام یک شرکت، x، در بازده (۳۰+، ۲۰-) قرار دارد و دارای تابع توزیع تجمعی زیر می باشد. احتمال اینکه بازدهی سهام مثبت و کمتر از ۱۵ باشد چقدر است؟

$$F(x) = \frac{x+20}{50}$$

Prob (x < 15) = F(15) = (15 + 20) / 50 = 70%

Prob (x < 0) = F(0) = 20 / 50 = 40%

Prob (0 < x < 15) = F(15) – F(0) = 70 – 40 = 30%

توزیع یکنواخت

- یک توزیع یکنواخت گسسته، دارای تعداد محدودی پیشامد است که همه آنها همشانس می باشند.

$$p(x) = 0.2 \text{ for } X = \{1,2,3,4,5\}$$

$$p(2) = 20\% \quad F(3) = 60\% \quad \text{Prob } (2 \leq X \leq 5) = 80\%$$

توزیع یکنواخت پیوسته

- احتمال به طور یکسان روی کل بازه توزیع شده است.
- مثال: متغیر تصادفی به طور پیوسته روی بازه ۲ تا ۱۰ توزیع شده است.

$P(X < 2) = 0 \qquad P(X > 10) = 0$

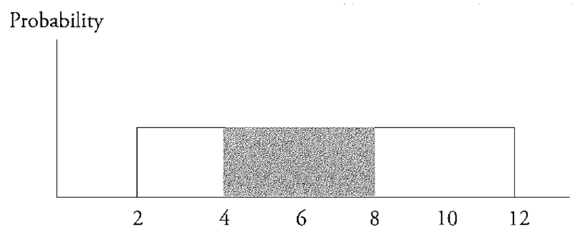
$P(3 \leq X \leq 5) = (5 - 3) / (10 - 2) = 2 / 8 = 25\%$

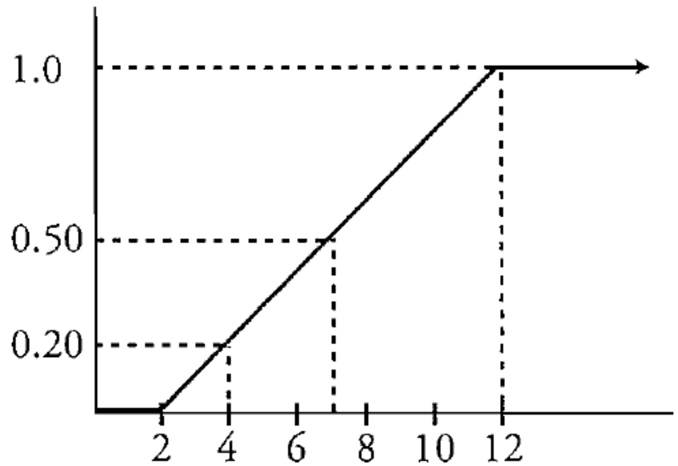
- احتمال وقوع هر تک نقطه صفر است.
- همچنین برای توزیع تجمعی آن داریم:

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & for \quad x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ ۱ & for \quad x \geq b \end{cases}$$

- X به طور یکنواخت بین 2 و 12 توزیع شده است. احتمال اینکه X بین 4 و 8 باشد را محاسبه نمایید.

$$\frac{8-4}{12-2} = \frac{4}{10} = 40\%$$



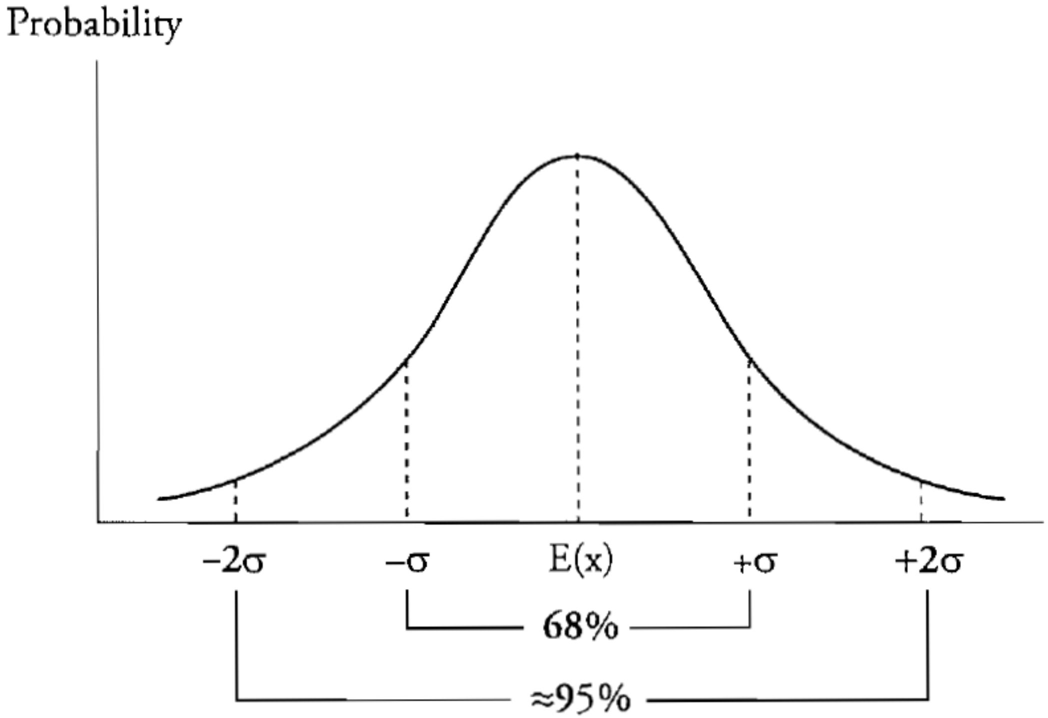


توزیع نرمال

- این توزیع با دانستن میانگین و واریانس کاملا توصیف می شود. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- این توزیع حول میانگین، متقارن است (چولگی=۰)
- کشیدگی آن برابر با ۳ است
- ترکیبهای خطی (جمع و تفریق) توابع توزیع نرمال، نیز نرمال می باشند.
- با دور شدن از میانگین، احتمال وقوع کاهش می یابد اما دمها تا بی نهایت ادامه پیدا می کند.
- میانگین = میانه = مد

فاصله اطمینان: توزیع نرمال

- فاصله اطمینان (confidence interval): بازه ای از مقادیر حول پیشامد مد نظر است که انتظار داریم پیشامد ما در درصد مشخصی از مواقع رخ دهد.



توزیع نرمال استاندارد

- یک توزیع نرمال که استاندارد شده است دارای میانگین صفر و انحراف معیار برابر با یک می باشد
- برای استاندارد کردن یک متغیر تصادفی، مقدار Z را محاسبه می کنیم.
- برای محاسبه Z، میانگین را از مشاهده کم کنید و حاصل را بر انحراف معیار تقسیم کنید.

$$z = \frac{\text{observation} - \text{population mean}}{\text{standard deviation}}$$

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- محاسبه احتمال با استفاده از توزیع استاندارد نرمال

- سود سهام مجموعه بزرگی از شرکتها دارای توزیع نرمال است و دارای میانگین ۴ و انحراف معیار ۱/۵ می باشد. احتمال اینکه سود سهام شرکتی که به طور تصادفی انتخاب می شود کمتر از ۳/۷ باشد چقدر است.

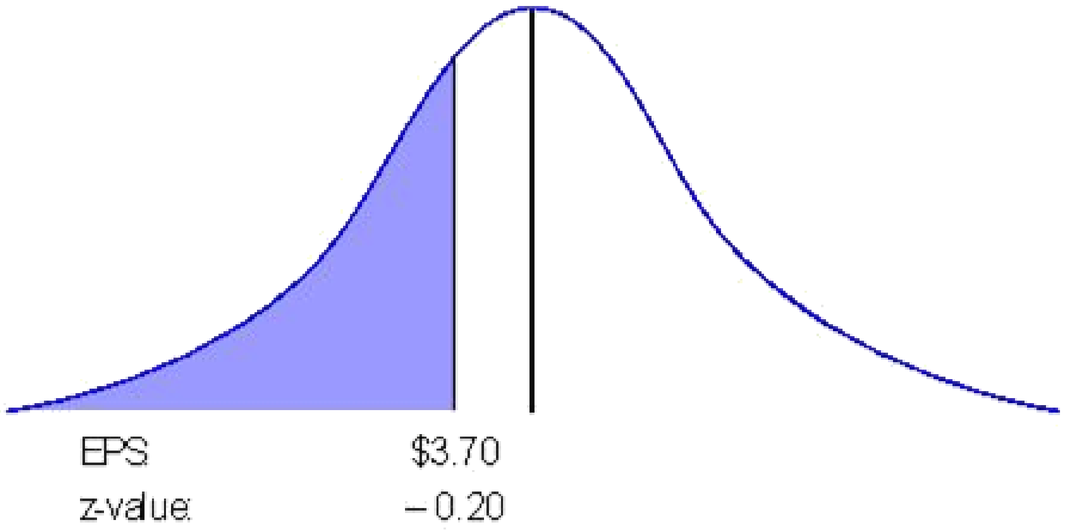
$$z = \frac{3.70 - 4.00}{1.50} = -0.20$$

- ۳/۷ به اندازه ۰/۲ انحراف معیار کمتر از میانگین ۴ میباشد

محاسبه احتمال با استفاده از توزیع نرمال استاندارد

- در اینجا هدف ما یافتن مساحت زیر نمودار، که در سمت چپ مقدار Z برابر با ۰/۲- است می باشد.

$$F(-Z) = 1 - F(Z)$$



Cdf Values for the Standard Normal Distribution: The z-Table										
z	**.00**	**.01**	**.02**	**.03**	**.04**	**.05**	**.06**	**.07**	**.08**	**.09**
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.5	.6915	Please note that several of the rows have been deleted to save space.*								
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

محاسبه احتمال با استفاده از توزیع نرمال استاندارد

$$F(-Z) = 1 - F(Z)$$

$$z = \frac{3.70 - 4.00}{1.50} = -0.20$$

N(-0.2) = 1 – N(0.2) = 1 - 0.5793 = 0.4207 = **42.07%**

For negative z-value, calculate 1 – table value

Z	.00	.01
0.0	.5000	.5040
0.1	.5398	.5438
0.2	.5793	.5832

مثال

فرض کنید که سود یک سهام (EPS)به طور نرمال با میانگین 6$ و انحراف معیار 2$ توزیع شده است. احتمال اینکه سود 9.7$ یا بیشتر باشد چقدر است؟

در اینجا هدف ما محاسبه مقدار زیر است:

$P(EPS>9.7)$

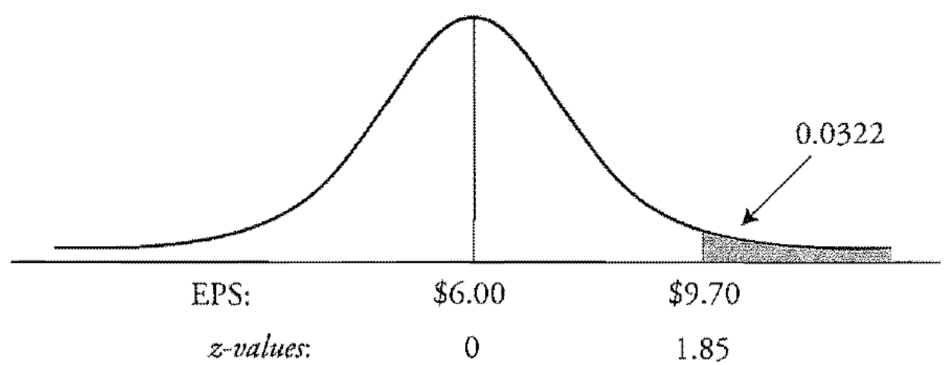
مقدار z را محاسبه می کنیم:

$$z=\frac{(x-\mu)}{\sigma}=\frac{(9.70-6)}{2}=1.85$$

یعنی 1.85 انحراف معیار بالای EPS میانگین. از جدول z مقدار مربوطه را می خوانیم. F(1.85)=0.9678 که این عدد در واقع P(EPS<9.7) است و مطلوب ما P(EPS>9.7) می باشد پس داریم:

P(EPS>9.7)=1- 0.9678=0.0322

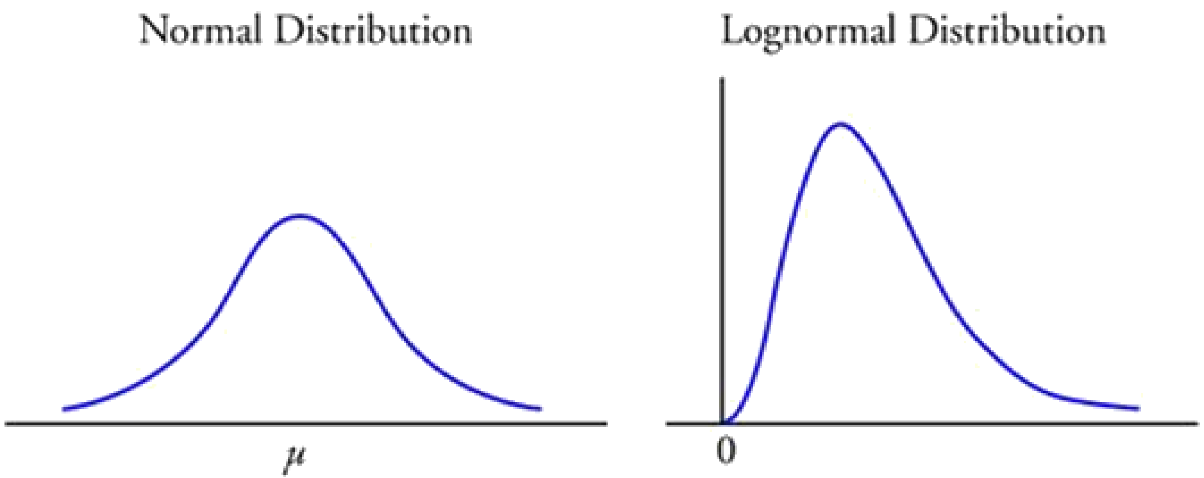
که همان %3.2 است



توزیع لگاریتم نرمال (Lognormal)

- در صورتیکه تابع توزیع x نرمال باشد، e^x لاگنرمال این توزیع خواهد.
- لگاریتم طبیعی (Ln) توابع لاگنرمال، توزیع نرمال دارند.
- لگاریتم نرمال همواره مثبت است و برای بررسی قیمتهای سهام استفاده می شود.

$$(1 - \text{return}) = e^{x}$$



بهره مرکب پیوسته و گسسته

- در حالت عادی، مراد از نرخ بهره، نرخ بهره گسسته است که به صورت ماهانه، شش ماهه، ... ترکیب می شود. در صور تیکه هدف محاسبه نرخ بهره پیوسته باشد، از توابع لگاریتم طبیعی $e^{R_{cc}} - 1$ بود.

- مثلا نرخ بهره 10 % مرکب شش ماهه، ماهانه و پیوسته را محاسبه می کنیم:

$$\left(1+\frac{0.10}{2}\right)^{2} - 1 = 10.25\%$$

$$\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12} - 1 = 10.47\%$$

$$e^{0.10} - 1 = 10.5171\%$$

شبیه سازی مونت کارلو

- از این شبیه سازی برای تخمین توزیع مشتقات یا مقادیر خالص ارزش فعلی استفاده می شود.

1. توزیع متغیرهای تصادفی ورودی را انتخاب کنید (نرخ بهره، قیمت سهام)
2. با استفاده از توابع ایجاد مقادیر رندوم کامپیوتر، این مقادیر را ایجاد کنید
3. خالص ارزش فعلی را با استفاده از این متغیر ها محاسبه کنید
4. گامهای ۲ و ۳ را هزاران بار تکرار کنید
5. میانگین و واریانس را محاسبه کنید.

نمونه گیری و تخمین آماری

نمونه گیری

- محققان درصدد تعیین پارامترهای جامعه هستند، این امر در اغلب مواقع یا ممکن نیست یا زمانبر و هزینه بر است. برای استنباط پارامترهای موردنظر به نمونه هایی از جامعه آماری اکتفا می کنند و مقدار آماره (sample statistic) را محاسبه می کنند.

- مقادیر محاسبه شده برای نمونه (آماره ها)، از نمونه ای به نمونه دیگر متغیرند. **توزیع آماره** (sampling distribution) تابع احتمالی است که از نمونه گیری مکرر و محاسبه مکرر آماره ها حاصل می شود.

- خطای نمونه گیری: عبارت است از تفاوت میان مقدار آماره و مقدار واقعی پارامتر برای جامعه آماری (یعنی $\bar{x} - \mu$)

نمونه گیری گروهی (Stratified random Sampling)

1. جامعه به گروههای متجانس تقسیم و هر گروه از افرادی تشکیل می شود که دارای ویژگیهای مشابه هستد. (آتی، حق تقدم، سهام...)
2. تعداد نمونه را نسبت به هر گروه (معمولا متناسب با اندازه زیر گروه) انتخاب کنید
3. نمونه گیری خوشه ای (Cluster Sampling)
4. در اینجا واحد نمونه گیری تعریف می شود و بعد به نمونه گیری می پردازیم. مثال بالا را در مورد بازارهای سهام کل دنیا داشته باشیم، می توانیم واحد نمونه را بازار سهام هر کشور در نظر بگیریم و بعد چند بازار سهام کشوری را انتخاب کنیم.

داده های سری زمانی یا برش مقطعی

- داده های سری زمانی
  - مقادیر یک داده در طی زمان. قیمت سهام شرکت ایران خودرو در ۳۶ ماه گذشته (۳۶ داده)
- داده های برش مقطعی
  - مقادیر یک داده در یک زمان مشخص. بازدهی شرکتهای خودرو سازی در ماه گذشته (۱۰ شرکت خودرو سازی = ۱۰ داده)

قضیه حد مرکزی

- برای هر جامعه آماریی با میانگین μ و واریانس σ^2، هر چه اندازه نمونه تصادفی افزایش یابد، توزیع میانگین نمونه ها به یک توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ نزدیکتر می شود.
- این قضیه به ما این توانایی را می دهد که با توجه به توزیع نرمال بتوانیم بر اساس میانگین نمونه، فاصله اطمینان برای میانگین جامعه آماری ایجاد کنیم. این امر در صورتیکه اندازه نمونه به حد کافی بزرگ باشد(n>=30) مستقل از توزیع جامعه آماری است.
- در صورتیکه اندازه نمونه به حد کافی بزرگ باشد(n>=30)، توزیع میانگین نمونه ها تقریبا نرمال خواهد بود.

خطای استاندارد میانگین نمونه

(standard error of the sample mean)

- خطای استاندارد میانگین نمونه عبارت است از انحراف معیار توزیع میانگین نمونه ها. (نمونه گیری به تعداد زیادی تکرار می شود، در هر نمونه گیری، مقداری برای میانگین محاسبه می شود، نمودار این میانگین ها رسم شود، توزیع نرمال خواهند داشت، انحراف معیار این توزیع نرمال، خطای استاندارد میانگین است).
- اگر σ جامعه آماری معلوم **باشد**:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- اگر σ جامعه آماری معلوم **نباشد** (رایج):

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- خطای استاندارد میانگین نمونه
- میانگین P/E برای نمونه ای از ۴۱ شرکت برابر ۱۹ است و انحراف معیار جامعه آماری نیز برابر با ۶/۶ می باشد. خطای استاندارد میانگین نمونه چیست؟

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6.6}{\sqrt{41}} = 1.03$$

- تفسیر: برای نمونه هایی با اندازه n=۴۱، توزیع میانگین نمونه ها دارای میانگین ۱۹خواهد بود و انحراف معیار این توزیع برابر ۱/۰۳ است.

تخمین نقطه ای و فاصله اطمینان

- مثال: میانگین P/E برای نمونه ای از ۴۱ شرکت برابر ۱۹ است و خطای استاندارد میانگین نمونه برابر با ۱/۰۳ است و توزیع آن نرمال است.
- تخمین نقطه ای میانگین برابر ۱۹ است
- فاصله اطمینان ۹۰٪ عبارت است از $19+/-1.65*(1.03)$

$$17.3 < \bar{X} < 20.7$$

- فاصله اطمینان ۹۰٪ عبارت است از $19+/-1.96*(1.03)$

$$17 < \bar{X} < 21$$

ایجاد فاصله اطمینان

- فاصله اطمینان برای یک متغیر تصادفی نرمال عبارت است از
- انحراف معیار * عامل پایایی +/- میانگین
- عامل پایایی (reliability factor) بستگی به توزیع دارد.
- برای یک توزیع نرمال با میانگین ۳ و انحراف میعار ۲ برای فاصله اطمینان ۹۰٪ داریم:

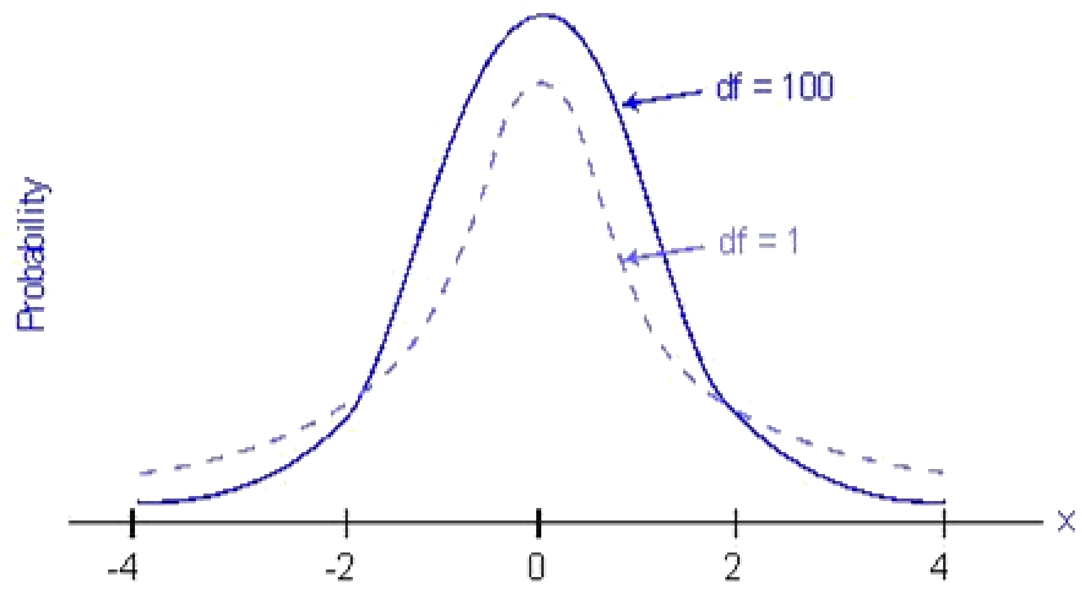
3 - 1.65 (2) to 3 + 1.65 (2) = -0.3 to 6.3

توزیع t استیودنت و درجه آزادی

- ویژگیهای توزیع t استیودنت
  - متقارن است
  - قله آن پایینتر از توزیع نرمال و دمهای آن ضخیمتر از توزیع نرمال هستند
  - بوسیله یک پارامتر تعریف میشود: درجه آزادی (degree of freedom) که در آن df=n-1
  - با افزایش df، توزیع t به توزیع نرمال نزدیکتر می شود.

توزیع t

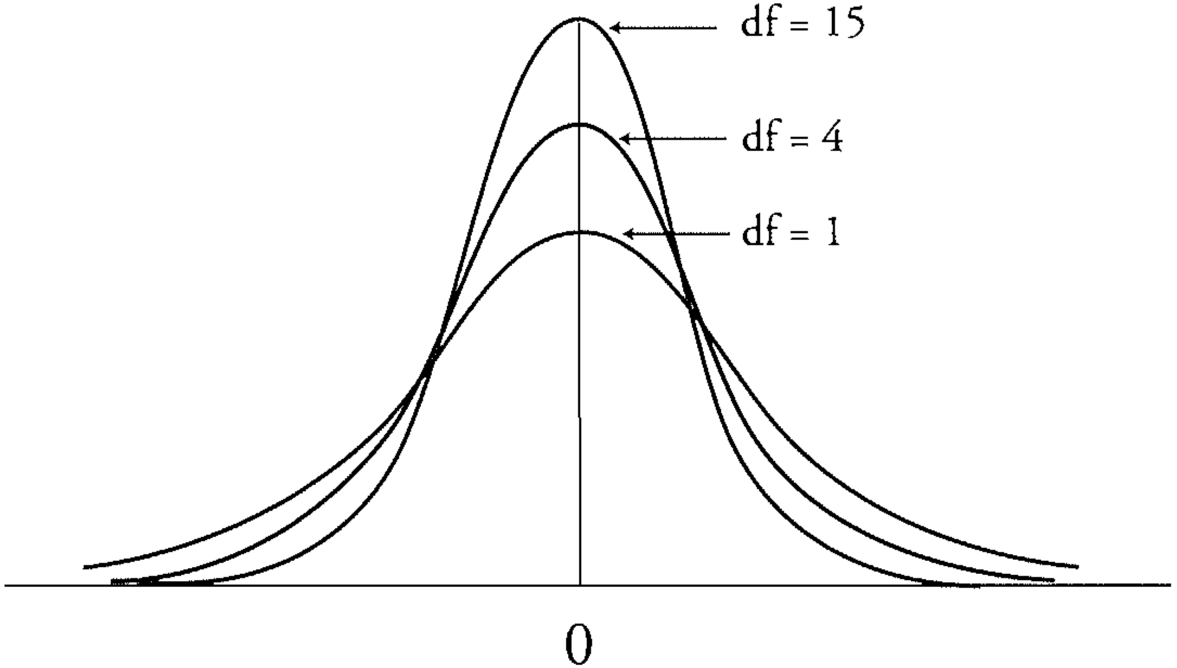
- شکل زیر توزیع t را با درجه آزادیهای مختلف نشان می دهد.
- هر چه درجه آزادی کمتر باشد، احتمال پیشامدهای پرت بیشتر می شود. (دمها ضخیمتر می شوند)



جدول t

	One-Tailed Probabilities, *p*	
df	p = 0.05	p = 0.025
5	2.015	2.571
10	1.812	2.228
15	1.753	2.131
20	1.725	2.086
25	1.708	2.060
30	1.697	2.042
40	1.684	2.021
50	1.676	2.009
60	1.671	2.000
70	1.667	1.994
80	1.664	1.990
90	1.662	1.987
100	1.660	1.984
120	1.658	1.980
∞	1.645	1.960

- نمودار توزیع t با درجه آزادی های مختلف



نمونه		عامل پایایی	
توزیع جامعه	واریانس	نمونه کوچک (n<۳۰)	نمونه بزرگ (n>۳۰)
نرمال	معلوم	آماره z	آماره z
نرمال	نامعلوم	آماره t	آماره t❊
غیرنرمال	معلوم	ناممکن	آماره z
غیرنرمال	نامعلوم	ناممکن	آماره t❊
❊ آماره z در این موارد قابل استفاده است اما استفاده از آماره t محافظه کارانه تر می باشد.			

واریانس معلوم: آماره z

واریانس نامعلوم: آماره t

مگر اینکه نمونه کوچک و توزیع غیر نرمال باشد

تشکیل فاصله اطمینان برای میانگین جامعه

- برای توزیع نرمال با واریانس معلوم

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$z_{\alpha/2}$ = 1.645 for 90% confidence intervals

$z_{\alpha/2}$ = 1.960 for 95% confidence intervals

$z_{\alpha/2}$ = 2.575 for 99% confidence intervals

- برای توزیع نرمال با واریانس نامعلوم
  - عامل پایایی به اندازه نمونه بستگی دارد (جدول)

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- مثال:توزیع نرمال، واریانس نامعلوم
- میانگین نمونه ۱۹ است. انحراف معیار نمونه برابر ۶/۶ است و n=41 است. برای میانگین جامعه یک فاصله اطمینان ۹۰٪ تشکیل دهید.
- از جدول t مقدار عامل پایایی (reliability factor) را می خوانیم.

$$\text{t - table reliability factor is } 1.684\ (df = 40,\ a/2 = 0.05)$$

$$\text{standard error of mean} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{6.6\%}{\sqrt{41}} = 1.03$$

$$19.0 \pm 1.684\,(1.03) = 17.27 < \text{mean} < 20.73$$

مسائل مربوط به اندازه نمونه

- مشاهده کردیم که اندازه بزرگتر نمونه ها موجب بهبود تخمین و کاهش فاصله اطمینان می شود، اما
- هزینه جزء عواملی است که باید در نظر گرفته شود. به دست آوردن اطلاعات بیشتر در اغلب موارد نیازمند هزینه بیشتر است و سود و ضرر باید باهم دیده شوند.
- در بعضی مواقع، بزرگتر کردن اندازه نمونه منجر به این می شود که اعضایی از جامعه آماری های دیگر (با پارامترهای دیگر) وارد نمونه شما شوند که این می تواند حتی منجر به کاهش دقت تخمین شما شود.

آزمون فرض آماری

- گامهای آزمون
  - فرضیه را بیان کنید (رابطه ای که مورد آزمون قرار خواهد گرفت)
  - یک آماره (test statistic) انتخاب کنید
  - سطح معنی داری را مشخص کنید (level of significance)
  - قاعده تصمیم گیری (decision rule) را برای فرضیه مطرح کنید
  - نمونه گیری انجام دهید و آماره را محاسبه کنید
  - در مورد فرض تصمیم گیری کنید
  - بر اساس نتایج تصمیم گیری نمایید

فرض صفر و فرض مقابل (Null & Alternative Hypotheses)

- فرض صفر(H_0)
  1. فرضیه که تست خواهد شد
  2. آزمایشگر می خواهد آنرا رد کند
  3. همیشه دارای علامت = است
- فرض مقابل(H_a)
  1. آنچه آزمایشگر می خواهد به آن نتیجه برسد
  2. آنچه که در صورت رد فرض صفر، استنتاج می شود.

آماره آزمون

$$\text{آماره آزمون} = \frac{\text{مقدار پارامتر جامعه آماری تحت آزمون صفر} - \text{آماره نمونه}}{\text{خطای استاندارد آماره نمونه}}$$

- آماره آزمون

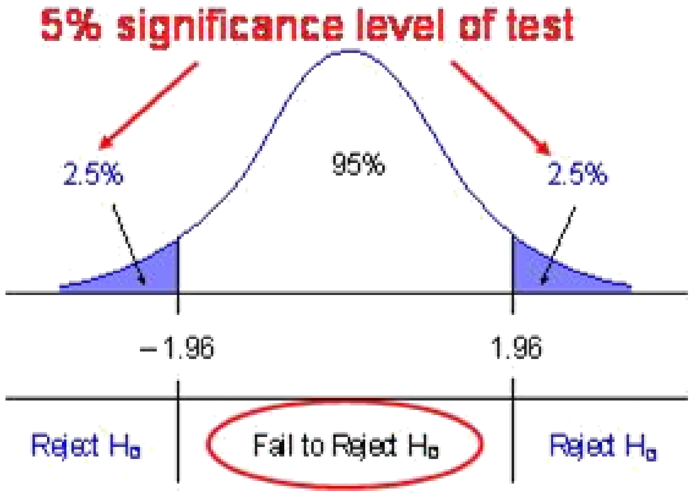
1. از داده های نمونه محاسبه می شود
2. با مقادیر بحرانی مربوط به فرض صفر قیاس می شود

- در صورتیکه آماره آزمون از مقادیر بحرانی تجاوز کند (خارج محدوده مقادیر بحرانی باشد)، محقق فرض صفر را رد می کند

آزمون دو دنباله (two tailed test)

- از این آزمون زمانی استفاده می شود که بررسی شود پارامتر یک جامعه آماری، متفاوت از مقدار مشخصی است

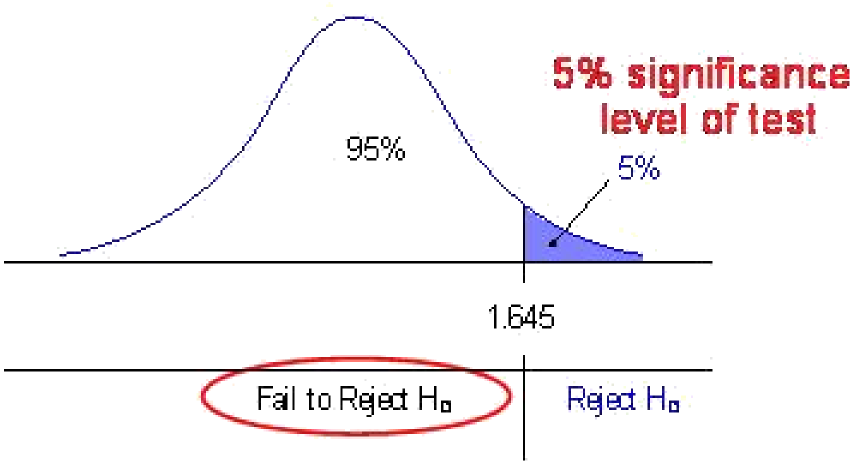
$$H_0: \mu = 0 \text{ versus } H_a: \mu \neq 0$$



آزمون یک دنباله (one tailed test)

- از این آزمون زمانی استفاده می شود که بررسی شود پارامتر یک جامعه آماری، بالاتر یا پایینتر از مقدار مشخصی است

$$H_0: \mu \le 0 \text{ versus } H_a: \mu > 0$$
$$H_0: \mu \ge 0 \text{ versus } H_a: \mu < 0$$



خطای نوع یک و نوع دو

- خطای نوع ۱
  - رد کردن H_0 وقتی که در واقع درست است
  - سطح معنی داری. همان احتمال خطای نوع ۱ است
- خطای نوع ۲
  - رد نکردن H_0 وقتی که در واقع غلط است
  - توان آزمون (Power of Test) عبارت است از ((احتمال خطای نوع ۲) – ۱)

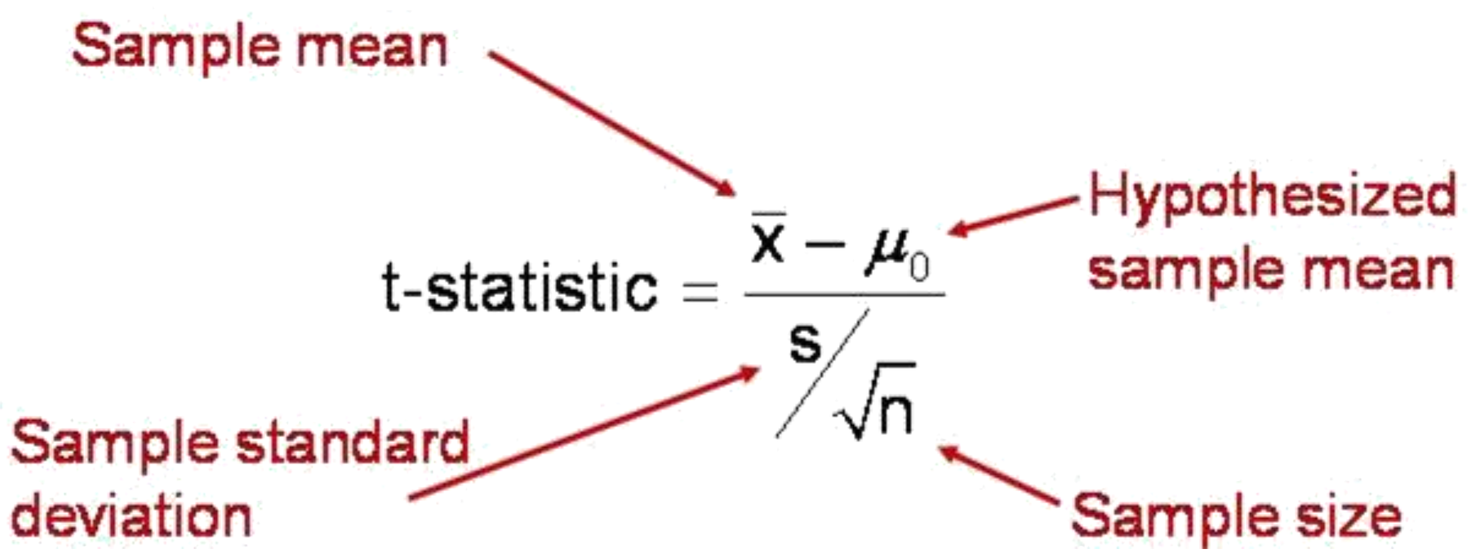
مقدار p

- مقدار p، کوچکترین سطح معنی داری است که در آن فرض صفر قابل رد شدن است.

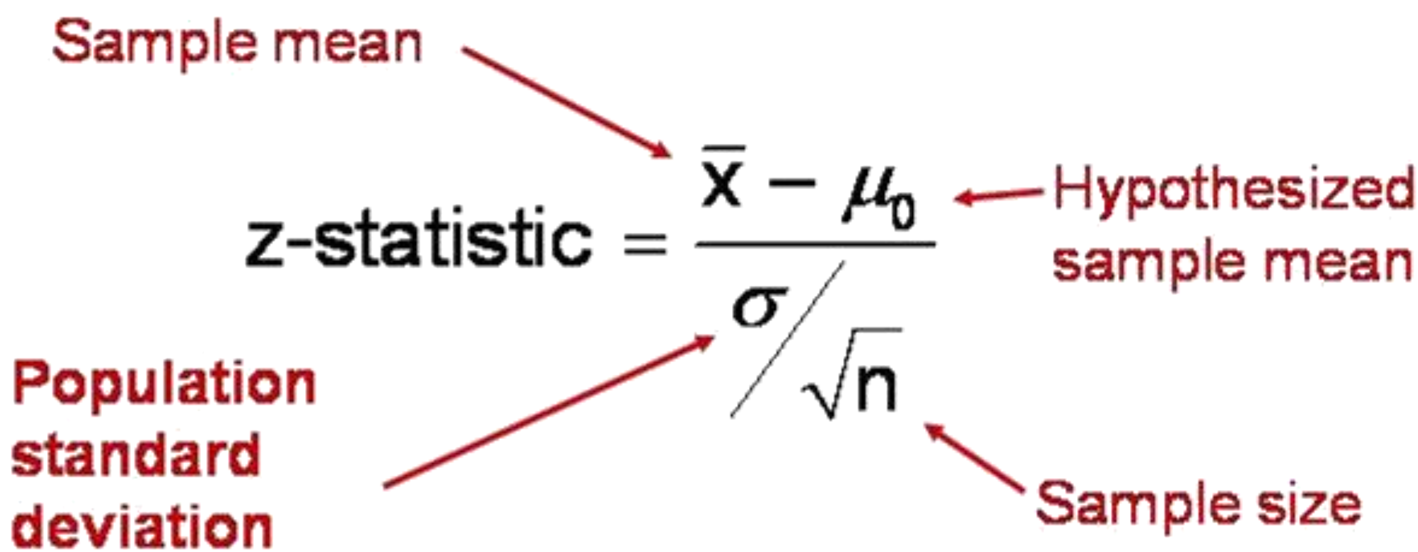
- برای مثال در صورتیکه مقدار p برابر ۰/۰۲۱۳ یا ۲/۱۳٪ باشد،
  - می توانیم فرض صفر را در سطح معنی داری ۵٪ رد کنیم
  - می توانیم فرض صفر را در سطح معنی داری ۳٪ رد کنیم
  - نمی توانیم فرض صفر را در سطح معنی داری ۱٪ رد کنیم

آماره آزمونهای مختلف

- آزمون میانگین یک جامعه آماری نرمال وقتی که واریانس جامعه آماری نامعلوم است، از آماره **t** استفاده می شود



- آزمون میانگین یک جامعه آماری نرمال وقتی که واریانس جامعه آماری معلوم است، از آماره z استفاده می شود



مقادیر بحرانی Z

Level of Significance	*Two-Tailed Test*	*One-Tailed Test*
0.10 = 10%	±1.65	+1.28 or −1.28
0.05 = 5%	±1.96	+1.65 or −1.65
0.01 = 1%	±2.58	+2.33 or −2.33

- مثال آزمون فرض آماری
- این فرضیه را که میانگین بازدهی یک صندوق برابر با ۱٪ در هر ماه است (آزمون دو دنباله) با سطح معنی داری ۵٪ را آزمایش کنید. اطلاعات داده شده:
  - میانگین نمونه: ۱/۵٪
  - اندازه نمونه: ۴۵
  - انحراف معیار: ۱/۴ ٪
  - واریانس جامعه آماری معلوم است
  - توزیع جامعه آماری غیر نرمال است

گفتیم که در صورتیکه واریانس جامعه آماری معلوم باشد و اندازه نمونه بزرگ باشد، از آماره z استفاده می کنیم

H_0: $\mu = 0.01$ and H_a: $\mu \neq 0.01$

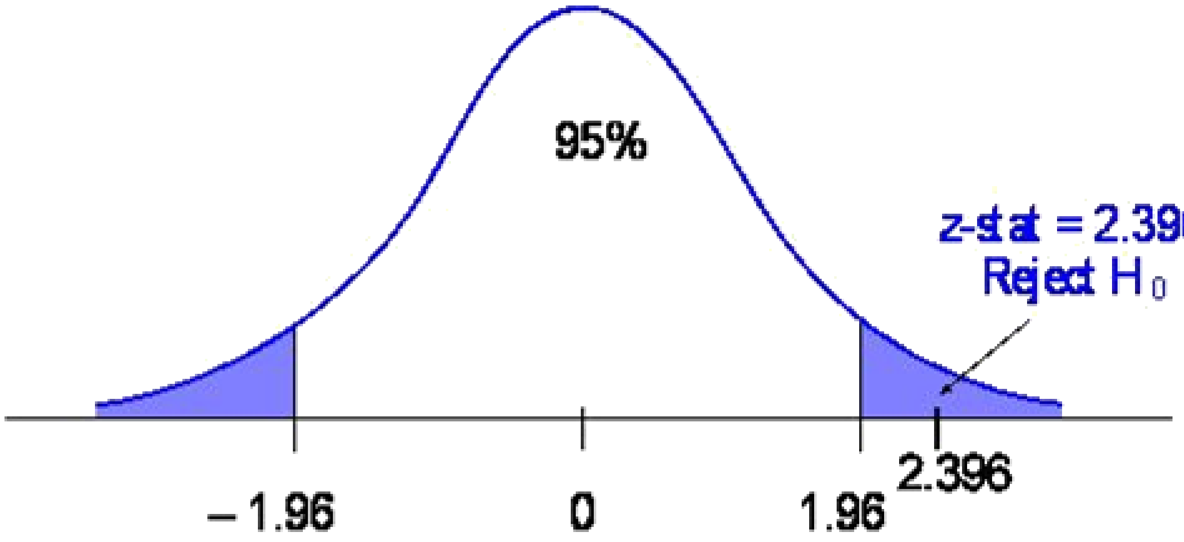
مقادیر بحرانی برای آزمون دو دنباله با سطح معنی داری ۵٪ عبارتند از ۱/۹۶+ و ۱/۹۶-

قاعده تصمیم گیری (Decision rule): اگر آماره آزمون بیرون محدوده مقادیر بحرانی باشد، فرض صفر را رد می کنیم

محاسبه آماره آزمون

$$\text{z-statistic} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{0.015 - 0.010}{0.014 / \sqrt{45}} = 2.396$$

از آنجا که آماره z خارج از محدوده مقادیر بحرانی قرار دارد فرض صفر را رد می کنیم. پس میانگین بازده = ۱٪ در سطح معنی داری ۵٪



Critical Values – 95% Confidence Interval

- محققین معتقدند که میانگین بازدهی های یک صندوق بیش از ۱٪ در ماه است. اندازه نمونه ۲۵ است و میانگین آن ۱/۵٪ و انحراف معیار آن برابر با ۱/۴٪ است. جامعه آماری نرمال است. فرضیه را در سطح معنی داری ۵٪ آزمایش نمایید.

Hypotheses: H_0: $\mu \leq 0.01$ H_a: $\mu > 0.01$

Type of Test: One-tailed *t*-test

Degrees of Freedom: 25 – 1 = 24

Critical Value: 1.711, one-tailed, 5% significance

Test Statistic: $t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{0.015 - 0.010}{0.014/\sqrt{25}} = 1.7857$

- از آنجا که آماره آزمون برابر ۱/۷۸۵۷ است و این مقدار بیش از مقدار بحرانی ۱/۷۱۱ است، فرض صفر را رد می کنیم

آماره آزمون مقایسه میانگین دو جامعه آماری (Difference in Means)

- آزمون اینکه میانگین دو جامعه آماری نرمال با هم برابر هستند. نمونه ها **مستقل** از هم هستند.

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \text{ versus } H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

وقتی واریانس دو جامعه نامعلومند اما فرض میشود برابر باشند

$$\text{t-stat} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_P^2}{n_1} + \frac{S_P^2}{n_2}}}$$

وقتی واریانس ها نامعلومند اما فرض میشود نابرابر باشند

$$\text{t-stat} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

آماره آزمون مقایسه زوجها (Mean Differences- Paired Comparison)

- آزمون اینکه میانگین دو جامعه آماری نرمال با هم برابر هستند. در واقع با تشکیل زوجهایی شبیه به هم و مقایسه این زوجها به آزمون می پردازیم. پس نمونه های وابسته هستند.

$$H_0: \mu_d = \mu_{dz} \text{ versus } H_a: \mu_d \neq \mu_{dz}$$

μ_d = mean of the population of paired differences
μ_{dz} = hypothesized mean of paired differences, which is commonly zero

Degrees of freedom are n – 1

Mean of the sample differences

$$\text{t-stat} = \frac{\bar{d} - \mu_0}{S_{\bar{d}}}$$

Hypothesized difference (= 0 for test of equality)

$$\left(\frac{\text{Standard deviation of sample differences}}{\sqrt{n}}\right)$$

آماره آزمون واریانس

- آزمون اینکه واریانس یک جامعه آماری با توزیع نرمال برابر با مقدار σ_0^2 است از آماره آزمون کای-دو (Chi square) استفاده می شود، دو دنباله است (می تواند یک دنباله هم تعریف شود). در صورتیکه خارج محدوده مقادیر بحرانی بود فرض صفر را رد کنید

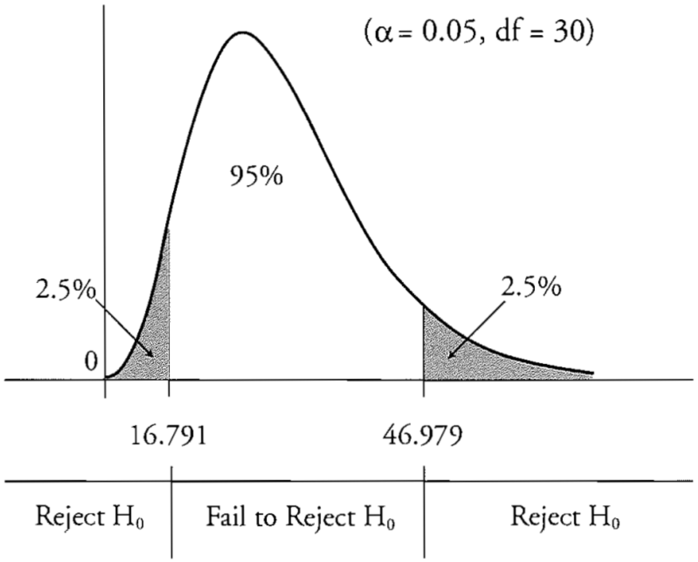
$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ versus } H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Degrees of freedom are n – 1

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

Sample variance

Hypothesized variance



آماره آزمون واریانس

- آزمون اینکه واریانس دو جامعه آماری نرمال با هم برابر هستند یا نه با استفاده از آزمون F صورت می گیرد.
- واریانس بزرگتر را در صورت کسر قرار میدهیم و در نتیجه مقادیر بحرانی بالا را صرفا بررسی می کنیم. با اینکه یک آزمون دو دنباله است.

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ versus } H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

S_1^2 ← Larger sample variance

S_2^2 ← Smaller sample variance

Degrees of freedom are $n_1 - 1$ and $n_2 - 1$

آزمونهای پارامتریک و ناپارامتریک

- آزمونهای پارامتریک بر مبنای فرضیاتی در مورد توزیع جامعه آماری و پارامترهای جامعه آماری است (آزمون t و z و F)
- آزمونهای ناپارامتریک، فرضی در مورد توزیع جامعه ندارند، و مواردی به غیر از مقادیر پارامتر ها را بررسی می کنند. (runs tests, rank correlation tests)

ارزش زمانی پول و کاربردها

شرکت کارگزاری بانک ملی ایران

ارزش زمانی پول و کاربردهای آن

(Time Value of Money

Discounted Cash Flow Applications)

دلیل وجود ارزش زمانی برای پول

- وجود بهره در اقتصاد، موجب می شود که پول ارزش زمانی داشته باشد؛ یعنی یک واحد پولی که امروز دریافت می شود بیش از یک واحد پولی که در آینده دریافت خواهد شد ارزش داشته باشد.

اگر نرخ بهره سالانه ۱۰ درصد باشد، ۱۰۰۰ واحد پولی امروز یک سال بعد ۱۱۰۰ واحد، ۲ سال بعد ۱۲۱۰ واحد و ۵ سال بعد ۱۶۱۰ واحد می ارزد.

۱۰۰۰ (۱ + ٪۱۰) = ۱۱۰۰

۱۰۰۰ (۱ + ٪۱۰)۲ = ۱۲۱۰

۱۰۰۰ (۱ + ٪۱۰)۳ = ۱۳۳۱

۱۰۰۰ (۱ + ٪۱۰)۴ = ۱۴۶۴

۱۰۰۰ (۱ + ٪۱۰)۵ = ۱۶۱۰

- نام دیگر نرخ بهره (Interest rates)، نرخ تنزیل(discount rates) است
- از دیدگاه دیگر، نرخ بهره به عنوان هزینه فرصت مصرف فعلی نیز می توان یاد کرد چونکه مصرف در آینده می تواند i% بالاتر باشد.
- نرخ بهره مورد نیاز (Required (nominal) interest rate) در مورد یک سرمای گذاری به عوامل متعددی همچون نرخ تورم انتظاری، صرف ریسک نکول(default risk premium)، صرف ریسک نقد شوندگی (liquidity premium) و صرف ریسک سررسید(maturity risk premium) بستگی دارد.

- نرخ بازده موثر سالانه
- نرخ بازده موثر سالانه (Effective Annual Rate) بوسیله رابطه زیر قابل محاسبه است

$$EAR = (1 + \text{periodic rate})^m - 1$$

where:

periodic rate = stated annual rate/m

m = the number of compounding periods per year

- فرض کنید نرخ بهره اسمی سالانه ۱۲٪ باشد که در هر سال دو بار بهره به آن تعلق می گیرد(یعنی هر ۶ ماه یک بار). نرخ بهره موثر سالانه را محاسبه کنید

i=12/2=6   m=2

$EAR=1.06^2 -1=12.36\%$

- فرض کنید نرخ بهره اسمی سالانه ۱۲٪ باشد که در هر سال چهار بار بهره به آن تعلق می گیرد(یعنی هر ۳ماه یک بار). نرخ بهره موثر سالانه را محاسبه کنید

$i = 12/4 = 3 \quad m = 4$

$EAR = 1.03^4 - 1 = 12.55\%$

- مساله را در حالت بهره مرکب ماهانه حل کنید.

$i=12/12=1 \quad m=12$

$EAR = 1.01^{12} - 1 = 12.68\%$

ارزش آتی مبلغ فعلی

$$FV = PV(1+i)^n$$

در رابطه فوق؛

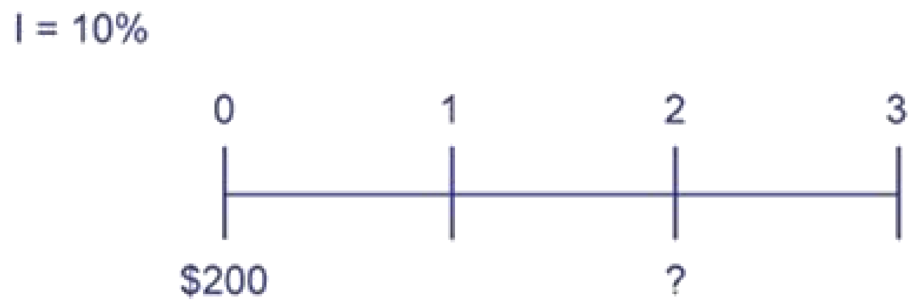
F : ارزش آینده (ارزش آتی) ،

P : ارزش فعلی (ارزش حال) ،

i : نرخ بهره و

n : تعداد دوره زمانی می باشد.

- اگر امروز ۲۰۰ریال با نرخ بهره ۱۰درصد سرمایه گذاری شود، پس از ۲سال جمع اصل و سود سرمایه گذاری چقدر می شود؟



200 (1.1) (1.1) = 242

N = 2; I/Y = 10; PV = 200; PMT = 0;

CPT → FV =-242.00

ارزش فعلی یک مبلغ

- اگر رابطه قبلی را بر اساس P بنویسیم، رابطه زیر به دست می آید که می توان با استفاده از آن ارزش فعلی یک قسط را محاسبه نمود.

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

- اگر ۳ سال دیگر به شما ۱۵۰۰۰۰ ریال بدهند، با نرخ بهره ۱۲ درصد ارزش فعلی این پول چقدر است؟

$$PV = \frac{150000}{(1+12\%)^3} = 106770$$

- اگر ۳ سال دیگر به ۱۵۰۰۰۰ ریال پول نیاز داشته باشید، با نرخ بهره ۱۲ درصد امروز چقدر باید سرمایه گذاری کنید تا پس از ۳ سال به پول مورد نظر خود برسید؟

$$PV = \frac{150000}{(1+12\%)^3} = 106770$$

- با نرخ بهره ۱۰ درصد چند سال طول می کشد تا ۱۰۰۰۰۰ ریال تبدیل به ۱۳۳۱۰۰ ریال شود؟

برای حل این مسئله باید در رابطه زیر، اعداد مختلف را بجای nقرار دهید تا به جواب مورد نظر برسید.

$$F = p(1+i)^n \Rightarrow n = 3$$

- با چه نرخ بـهره ای پـس از ۳ سال ۱۰۰۰۰۰ ریال تبـدیل به ۱۳۳۱۰۰ ریال می شود؟

برای حل این مسئله باید در رابطه زیر، اعداد مختلف را بجای **i** قرار دهید تا به جواب مورد نظر برسید.

$$133100 = 100000\,(1+i)^3 \Rightarrow i = 10\%$$

- یک حساب سرمایه گذاری ۱۰۰،۰۰۰ تومانی که به صورت فصلی بهره مرکب دارد، بعد از دو سال ارزشی برابر با ۱۲۳،۵۲۸ تومان پیدا می کند. نرخ بهره موثر و اسمی را محاسبه کنید

Effective annual: N = 2, PMT = 0, PV = -100,000, FV = 123,528,

CPT →I/Y = 11.143 (%) **OR**

$(123{,}528/100{,}000)^{1/2} - 1 = 0.11143$

Stated annual: N = 8, PMT = 0, PV = -100,000, FV = 123,528, CPT →I/Y = 2.6764 x 4 = 10.706% **OR**

$= (123{,}528/100{,}000)^{1/8} – 1 = 0.02676 \times 4 =$ ۰.۱۰۷۰۶

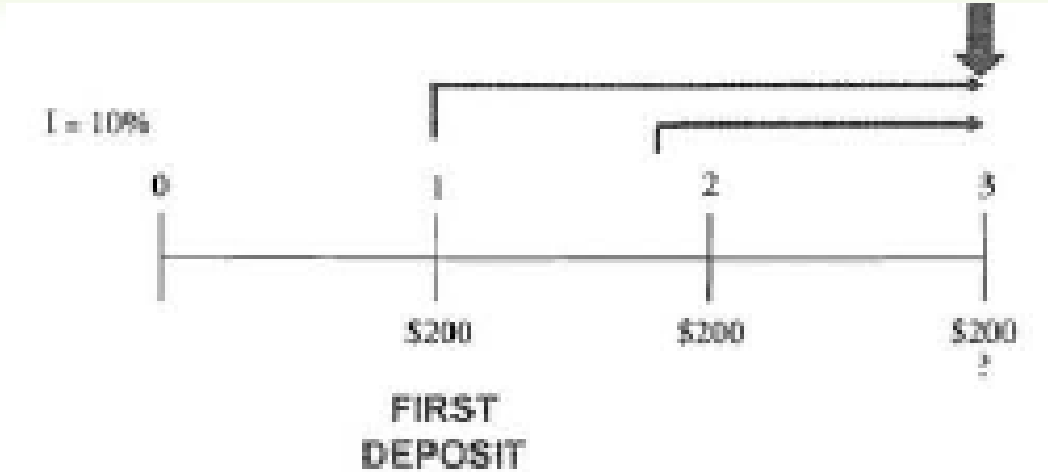
سالواره(**annuity**)

- سالواره عبارت است از تعدادی پرداخت با اندازه مساوی. برای مثال دریافت ۱۰۰۰۰۰تومان در انتهای سال برای ۸ سال آتی. همانند اقساط با مبلغ یکسان پرداختی.

- برای محاسبه ارزش آتی چند قسط مساوی، از رابطه زیر، عامل مرابحه اقساط مساوی را محاسبه نموده و در مبلغ یک قسط ضرب می کنند:

$$FV/A = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- ارزش آتی سه قسط ۲۰۰$ را در انتهای سه سال محاسبه کنید.



$200 \times 1.1^{2} + 200 \times 1.1 + 200 = 662$

N = 3; I/Y = 10; PMT = -200; CPT → FV = 662.00

- مثال۱۰: ارزش آتی ۴ قسط مساوی ۲۵۰۰۰ ریالی با نرخ بهره ۱۰ درصد چقدر می شود؟

$$F/A = \frac{(1+10\%)^n - 1}{10\%} = 4.641$$

۲۵۰۰۰ × ۶۴۱/۴ = ۱۱۶۰۲۵

سالواره دائمی (Perpetuity)

- در صورتیکه پرداختها به تعداد خیلی زیاد و نامتناهی باشند، سالواره دائمی نامیده می شود.

$$PV = A/i$$

- یک سهام ممتاز برای سالهای آتی در هر سال ۸ تومان پرداخت خواهد کرد. نرخ بهره مورد نیاز ۱۰٪ است. ارزش این سهام چقدر است؟

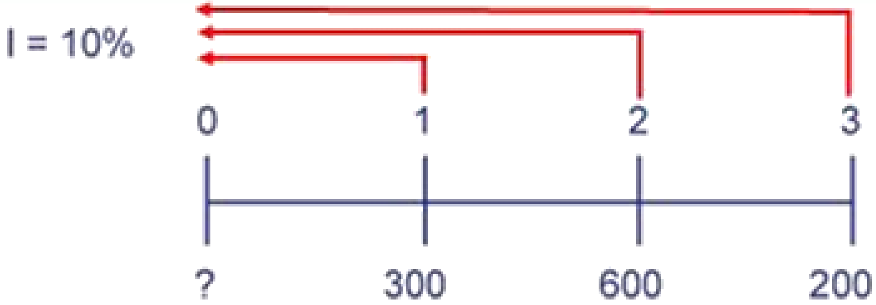
$$PV = \frac{8}{1.1} + \frac{8}{1.1^2} + \frac{8}{1.1^3} + \frac{8}{1.1^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$PV = \frac{8}{0.1} = \$80$$

ارزش فعلی و ارزش آتی چند قسط نامساوی (جریانهای نقدینه متغیر)

- برای محاسبه ارزش فعلی و یا ارزش آتی چند قسط نامساوی، از همان روابط مورد استفاده در قسمت ارزش فعلی و ارزش آتی یک قسط استفاده می شود.
- در انتهای سه سال آتی، به ترتیب سه پرداختی ۳۰۰$، ۶۰۰$ و ۲۰۰$ داریم. ارزش فعلی و آتی این پرداختها را محاسبه نمایید.

- ارزش فعلی



$200 / 1.1^3 + 600 / 1.1^2 + 300 / 1.1 = \$918.86 = PV$

N = 1; I/Y = 10; FV = 300; CPT → PV = $272.73

N = 2; I/Y = 10; FV = 600; CPT → PV = $495.87

N = 3; I/Y = 10; FV = 200; CPT → PV = $<u>150.26</u>

- ارزش آتی

300 $(1.1)^2$ + 600 (1.1) + 200 = $1,223

N = 2; I/Y = 10; PV = -300; CPT → FV = $363

N = 1; I/Y = 10; PV = -600; CPT → FV = $660

۲۰۰$

۱,۲۲۳$

در صورتیکه وجوه دریافتی یک شخص در پایان سال اول ۵۰۰۰ ریال، سال دوم ۸۵۰۰ ریال، سال سوم ۷۰۰۰ ریال و سال چهارم ۱۲۰۰۰ ریال باشد، ارزش فعلی آنها با نرخ بهره ۱۰ درصد چقدر می شود؟

برای حل این مسئله باید ارزش فعلی هرکدام از اعداد را بدست آوریم و سپس اعداد بدست آمده را با هم جمع کنیم.

$$\boxed{P = \frac{F}{(1+i)^n}}$$

$$\boxed{P = \frac{5000}{(1+10\%)^1} = 4545}$$

$$\boxed{P = \frac{8500}{(1+10\%)^2} = 7025}$$

$$\boxed{P = \frac{12000}{(1+10\%)^4} = 8196}$$

$$\boxed{P = \frac{7000}{(1+10\%)^3} = 5259}$$

۴۵۴۵ + ۷۰۲۵ + ۵۲۵۹ + ۸۱۹۶ = ۲۵۰۲۵

می توان تمام موارد فوق را بصورت زیر بطور یکجا محاسبه کرد:

$$P=\frac{5000}{(1+10\%)^{1}}+\frac{8500}{(1+10\%)^{2}}+\frac{7000}{(1+10\%)^{3}}+\frac{12000}{(1+10\%)^{4}}=25025$$

ارزش فعلی (ارزش حال) چند قسط مساوی

- برای محاسبه ارزش فعلی چند قسط مساوی ، از رابطه زیر عامل تنزیل اقساط مساوی را محاسبه نموده و در مبلغ یک قسط ضرب می کنند:

$$P/A = \frac{1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

ارزش فعلی ۴ قسط مساوی ۲۵۰۰۰ ریالی با نرخ بهره ۱۰ درصد چقدر می شود؟

$$P/A=\frac{1-\dfrac{1}{(1+10\%)^{4}}}{10\%}=3.1699$$

۲۵۰۰۰ × ۱۶۹۹/۳ = ۷۹۲۴۷

ارزش آتی سرمایه گذاری سالانه ۱۰۰ واحد پولی از آخر سال اول به مدت ۵ سال با فرض نرخ بهره ۸٪ چه مقدار می باشد؟

F / A(n = ۵ و i =٪۸) × ۱۰۰ =F

ارزش آتی ۵ قسط یک ریالی با نرخ ۸٪ را بصورت زیر محاسبه کنید:

$$F/A=\frac{(1+8\%)^{5}-1}{8\%}=5.8666$$

خالص ارزش فعلی (NPV)

- در این روش برای ارزیابی پروژه های سرمایه گذاری «ارزش فعلی خالص جریانات نقدی» محاسبه و بر اساس آن تصمیم گیری انجام می شود. اگر خالص ارزش فعلی جریانات نقدی یک طرح مثبت باشد، طرح پذیرفته می شود ولی اگر خالص ارزش فعلی جریانات نقدی یک طرح عدد منفی باشد، طرح پذیرفته نخواهد شد. در مواردی که خالص ارزش فعلی جریانات نقدی یک طرح صفر شود، شرکت در پذیرش یا عدم پذیرش آن مختار است.

$$NPV = CF_0 + \frac{CF_1}{(1+k)^1} + \frac{CF_2}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{CF_n}{(1+k)^n}$$

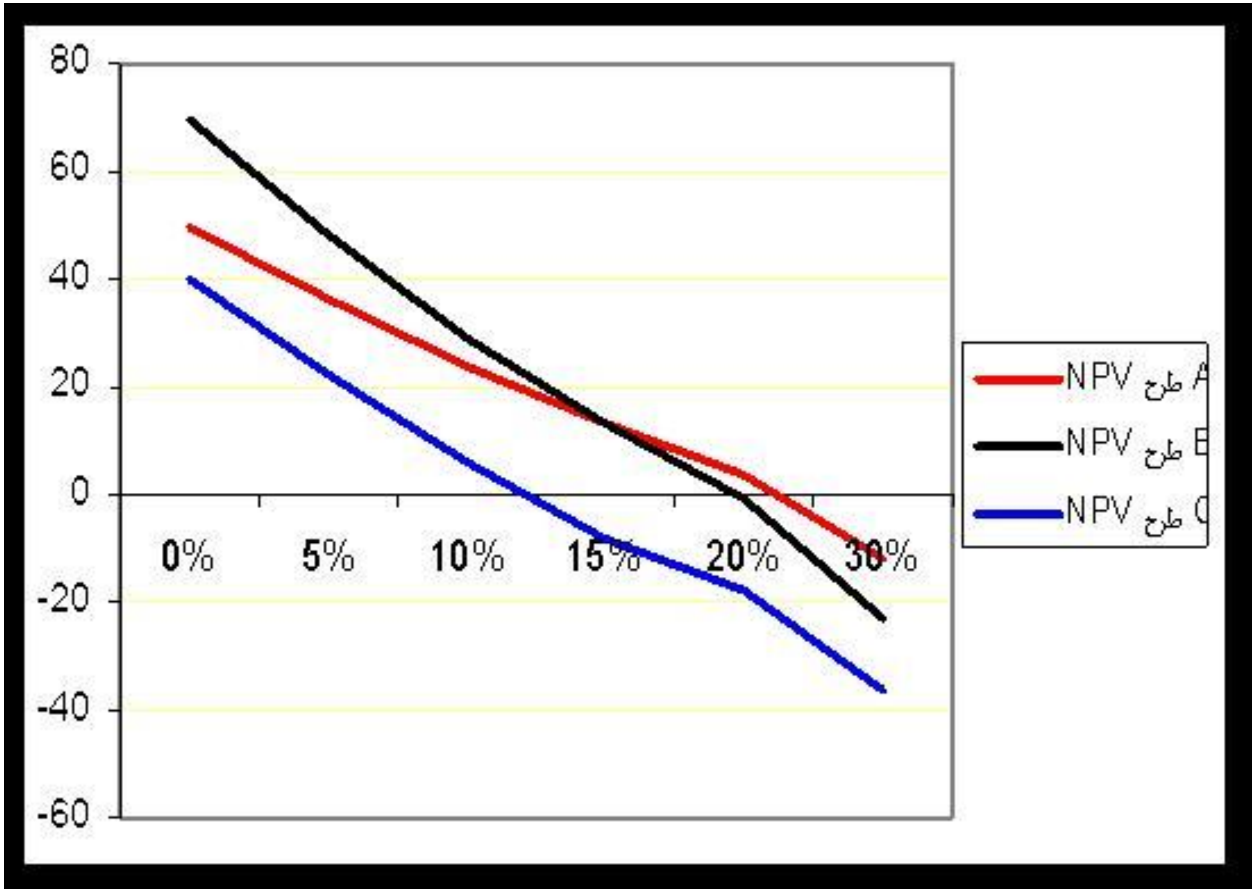
- با استفاده از نرخ تنزیل ۹٪ ، خالص ارزش فعلی سرمایه گذاری زیر را محاسبه میکنیم.

End of Year	Project X	Discounted Cash Flow
0	-$100	-$100.00
1	25	22.94
2	50	42.08
3	75	57.91

NPV=$22.93

- در مواردی که شرکت در نظر دارد از بین چند طرح پیشنهادی یکی از آنها را انتخاب کند، باید طرحی انتخاب شود که NPV آن مثبت و از NPV سایر طرحها بزرگتر باشد.
- روش NPV یکی از بهترین روشهای ارزیابی پروژه های سرمایه گذاری می باشد.

- نمودار NPV بر حسب نرخ تنزیلهای متفاوت



- ب) نرخ بازده داخلی یا درونی (**Internal Rate of Return (IRR)**)

- نرخ بازده داخلی یا نرخ بازده درونی عبارت است از نرخی که اگر با آن NPV طرح محاسبه شود، NPVبرابر صفر گردد.

$$NPV = 0 = CF_0 + \frac{CF_1}{(1+IRR)^1} + \frac{CF_2}{(1+IRR)^2} + \dots + \frac{CF_n}{(1+IRR)^n}$$

- در صورتیکه ماشین حساب مالی به همراه نداشته باشید، برای محاسبه IRR بایستی از سعی و خطا استفاده کنید.

- نرخ بازده داخلی

End of Year	Project X CFs	Discounted Cash Flow at 19.4%
0	-$100	-$100.00
1	25	+20.94
2	50	+35.07
3	75	+44.06

∑=0.00=NPV

از آنجا که در نرخ تنزیل ۱۹/۴٪ خالص ارزش فعلی برابر صفر شده است، پس نرخ بازده داخلی برابر با صفر است.

- شرط پذیرش یک طرح با استفاده از روش نرخ بازده داخلی این است که نرخ بازده داخلی طرح از نرخ هزینه سرمایه شرکت بیشتر باشد. چنانچه نرخ بازده داخلی طرح از نرخ هزینه سرمایه شرکت کمتر باشد، طرح نباید پذیرفته شود و در صورتیکه نرخ بازده داخلی طرح با نرخ هزینه سرمایه شرکت برابر باشد، شرکت در پذیرش یا عدم پذیرش طرح مختار است.

- مشکلات روش IRR
- در صورتیکه جریانهای نقدی، بیش از یک بار تغییر علامت بدهند(از منفی به مثبت و بعد دوباره منفی)، در این صورت ممکن است بیش از یک IRR وجود داشته باشد
- جریانهای نقدینگی (سرمایه گذاریها) را بر اساس NPV می توان رتبه بندی نمود اما بر اساس IRR نمی توان این کار را انجام داد.

شرکتی ۴۰۰۰۰ واحد پولی برای خرید یک ماشین سرمایه گذاری کرده است. ارزش اسقاط این ماشین بعد از ۴ سال عمر مفید آن صفر می باشد. خالص جریان نقدینه و سود حاصل از ماشین در جدول زیر آمده است:

سال	جریان نقدینه	ســـــود
۱	۲۰۰۰۰	۱۰۰۰۰
۲	۲۰۰۰۰	۱۰۰۰۰
۳	۱۵۰۰۰	۵۰۰۰
۴	۱۵۰۰۰	۵۰۰۰

الف) نرخ بازده درونی این طرح را محاسبه کنید.

$$40000 = \frac{20000}{(1+i)} + \frac{20000}{(1+i)^2} + \frac{15000}{(1+i)^3} + \frac{15000}{(1+i)^4} \Rightarrow i = 28.88\%$$

- ب) خالص ارزش فعلی سرمایه گذاری را با فرض هزینه سرمایه ۱۴٪ محاسبه کنید.

$$NPV = \frac{20000}{(1+14\%)} + \frac{20000}{(1+14\%)^2} + \frac{15000}{(1+14\%)^3} + \frac{15000}{(1+14\%)^4} - 40000 = 11939$$

بازده دوره نگهداری ((Holding Period Return (HPR

- این بازده همانطور که از اسم آن پیداست، درصد افزایش در ثروت را در طول دوره مد نظر محاسبه می کند. آنچه در اینجا اهمیت ندارد، طول دوره است.
- سهامی که ۶ ماه پیش به قیمت ۹$ خریده شده بود الان ۱۰/۲$ ارزش دارد. بازده دوره چه میزان بوده است؟
- 10.20 / 9 - 1 = 1.20 / 9 = 13.33%

- سهامی که سال قبل به قیمت ۲۹$ خریداری شده است، ۱/۳$ سود سهام پرداخت کرده است و الان قیمتش ۳۰/۵۰ دلار است.
- (30.50 + 1.30) / *29 - 1 = 9.66%*

نرخ بازده موزون زمانی (Time-Weighted Returns)

- در اینجا نرخ بازده دوره نگهداری های مختلف محاسبه می شود.
- نرخهای بازده موزون زمانی سالانه، نرخای موثر سالانه هستند. دوره ها، ممکن است طول متفاوتی داشته باشند.

$$TWR = \left[\left(\frac{\text{End Value}_1}{\text{Begin Value}_1}\right)\left(\frac{\text{End Value}_2}{\text{Begin Value}_2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{\text{End Value}_N}{\text{Begin Value}_N}\right)\right.$$

$1+HPR_1$

نرخ بازده موزون پولی(Money-Weighted Returns)

- نرخهای بازده موزون پولی همانند IRR هستند. طول دوره ها بایستی مساوی باشد. از کوتاهترین دوره ای که در آن جریان نقدینگی رخ نداده است استفاده کنید.

$$CF_0 + \frac{CF_1}{1+MWR} + \ldots + \frac{CF_N}{(1+MWR)^N} = 0$$

- در یک حساب سپرده گذاری، ۱۰۰۰$ در زمان t=0 سرمایه گذاری می کنیم. در t=1 ارزش حساب عبارت است از ۱۲۰۰$ (۲۰٪+) و ۸۰۰$ به حساب اضافه می کنیم(ارزش حساب به ۲۰۰۰$ می رسد). در زمان t=2 ارزش حساب برابر ۲۲۰۰$ شده است(۱۰٪+) و در اینجا کل پول را برداشت می کنیم.

نرخ بازده موزون پولی و زمانی را محاسبه نمایید.

$$TWR = [(1.2)(1.1\ )]^{1/2} - 1 = 14.89\%$$

$$-1000 + \frac{-800}{1.13623} + \frac{2200}{1.13623^2} = 0$$

MWR = 13.623%

نرخ بازده پولی، به بازده دوره دوم وزن بیشتری می دهد.

BOY, HPY, EA Y, MMY

$$\text{Bank discount yield} = \frac{\text{Discount}}{\text{Face}} \times \frac{360}{\text{days to maturity}}$$

$$\text{Holding period yield} = \frac{\text{Ending value}}{\text{Beginning value}} - 1$$

$$\text{Effective annual yield} = (1 + \text{HPY})^{\frac{365}{\text{days}}} - 1$$

$$\text{Money market yield} = \text{HPY} \times \frac{360}{\text{days to maturity}}$$

Yield Example: 90-day T -bill priced at $980

$$BDY = \frac{20}{1,000} \times \frac{360}{90} = 8\%$$

Simple annualized discount

$$HPY = \frac{1,000}{980} - 1 = 2.04\%$$

90-day HPY

$$EAY = (1.0204)^{\frac{365}{90}} - 1 = 8.53\%$$

Effective rate

$$MMY = 0.0204 \times \frac{360}{90} = 8.16\%$$

Simple annualized

نمونه سوالات

شرکت کارگزاری بانک ملی ایران

- با استفاده از مقادیر جدول زیر برای نرخهای بازده سهام شرکت الف، جدول توزیع فراوانی مطلق، نسبی و تجمعی را تشکیل دهید.

10.4%	22.5%	11.1%	–12.4%
9.8%	17.0%	2.8%	8.4%
34.6%	–28.6%	0.6%	5.0%
–17.6%	5.6%	8.9%	40.4%
–1.0%	–4.2%	–5.2%	21.0%

$(-28.6\% \rightarrow 40.4\%)$

Interval	*Tallies*	*Absolute Frequency*	*Relative Frequency*
$-30\% \leq R_t < -20\%$	/	1	1/20 = 0.05, or 5%
$-20\% \leq R_t < -10\%$	//	2	2/20 = 0.10, or 10%
$-10\% \leq R_t < 0\%$	///	3	3/20 = 0.15, or 15%
$0\% \leq R_t < 10\%$	///// //	7	7/20 = 0.35, or 35%
$10\% \leq R_t < 20\%$	///	3	3/20 = 0.15, or 15%
$20\% \leq R_t < 30\%$	//	2	2/20 = 0.10, or 10%
$30\% \leq R_t < 40\%$	/	1	1/20 = 0.05, or 5%
$40\% \leq R_t \leq 50\%$	/	1	1/20 = 0.05, or 5%
Total		20	100%

Interval	*Absolute Frequency*	*Relative Frequency*	*Cumulative Absolute Frequency*	*Cumulative Relative Frequency*
$-30\% \leq R_t < -20\%$	1	5%	1	5%
$-20\% \leq R_t < -10\%$	2	10%	3	15%
$-10\% \leq R_t < 0\%$	3	15%	6	30%
$0\% \leq R_t < 10\%$	7	35%	13	65%
$10\% \leq R_t < 20\%$	3	15%	16	80%
$20\% \leq R_t < 30\%$	2	10%	18	90%
$30\% \leq R_t < 40\%$	1	5%	19	95%
$40\% \leq R_t \leq 50\%$	1	5%	20	100%
Total	20	100%		

- تحلیلگری نسبتهای قیمت به درآمد(P/E) چند شرکت را به شاخص S&P 500 جمع آوری و این شرکتها را از بیشترین P/E به کمترین P/E مرتب کرده است. او به هر گروه یک شماره اختصاص داده است: بعنوان مثال، گروه دارای کمترین نسبت P/E شماره ۱، گروه بعدی شماره ۲ و الی آخر. نوع مقیاس اندازه گیری مورد استفاده این تحلیلگر کدام است؟
- ترتیبی(ordinal)
- فاصله ای(interval)
- اسمی(nominal)
- نسبتی (ratio)

- این تحلیلگر از مقیاس ترتیبی استفاده کرده است که شامل دسته بندی داده ها بر اساس خصوصیاتی چون نسبت P/E شرکتها می باشد.

- راننده ای مسیر تهران قم را با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت می رود و همین مسیر را با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت برمی گردد. متوسط سرعت راننده را محاسبه کنید.

- راننده ای مسیر تهران قم را با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت می رود و همین مسیر را با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت برمی گردد. متوسط سرعت راننده را محاسبه کنید.

$$\mu = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{100}} = 88.89$$

- جدول زیر را برای بازدهی سهام الف در نظر بگیرید

2003	2004	2005	2006	2007	2008
22%	5%	–7%	11%	2%	11%

- میانیگین هندسی بازده ها را محاسبه نمایید؟ میانه و مد را مشخص کنید.

- میانگین حسابی

$$[22\% + 5\% + -7\% + 11\% + 2\% + 11\%] / 6 = 7.3\%$$

- میانه:
- مرتب کردن داده ها:
- -۷و۲و۵و۱۱و۱۱و۲۲

$$(5\% + 11\%) / 2 = 8.0\%$$

- مد: ۱۱

- جدول زیر را برای بازدهی سهام الف در نظر بگیرید

2003	2004	2005	2006	2007	2008
22%	5%	–7%	11%	2%	11%

- دامنه تغییرات، انحراف متوسط از میانگین را محاسبه کنید
- واریانس و انحراف معیار را با این فرض حساب کنید که توزیع فوق جمعیت باشد (محاسبه پارامتر)
- واریانس و انحراف معیار را با این فرض حساب کنید که توزیع فوق نمونه باشد (محاسبه آماره)

- دامنه تغییرات

$22\% - (-7\%) = 29.0\%$

- انحراف متوسط از میانگین

$(|22 - 7.3| + |5 - 7.3| + |-7 - 7.3| + |11 - 7.3| + |2 - 7.3| + |11 - 7.3|) / 6 = 7.33\%$

- واریانس و انحراف معیار جمعیت

$\sigma^2 = [(22 - 7.3)^2 + (5 - 7.3)^2 + (-7 - 7.3)^2 + (11 - 7.3)^2 + (2 - 7.3)^2 + (11 - 7.3)^2] / 6$
$= 80.2\%^2$

$\sigma = \{[(22 - 7.3)^2 + (5 - 7.3)^2 + (-7 - 7.3)^2 + (11 - 7.3)^2 + (2 - 7.3)^2 + (11 - 7.3)^2] / 6\}^{½}$

$= (80.2\%^2)^{0.5}$

$= 8.96\%$

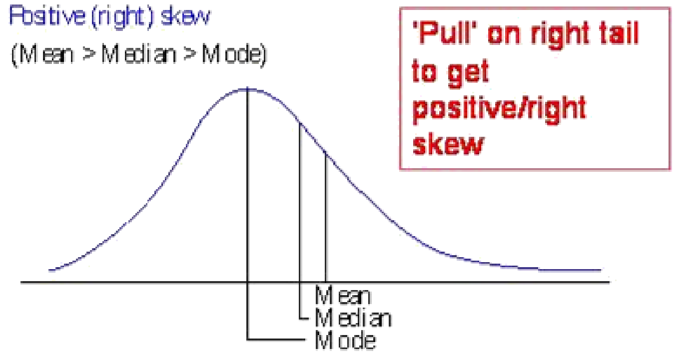
- واریانس و انحراف معیار نمونه

$s^2 = [(22 - 7.3)^2 + (5 - 7.3)^2 + (-7 - 7.3)^2 + (11 - 7.3)^2 + (2 - 7.3)^2 + (11 - 7.3)^2] / (6 - 1) = 96.3\%^2$

$s = \{[(22 - 7.3)^2 + (5 - 7.3)^2 + (-7 - 7.3)^2 + (11 - 7.3)^2 + (2 - 7.3)^2 + (11 - 7.3)^2] / (6 - 1)\}^{0.5} = (96.3)^{0.5} = 9.8\%$

- اگر توزیعی عدم تقارن مثبت نشان دهد، به احتمال زیاد میانگین در کجا قرار دارد؟
- سمت چپ میانه و مد
- سمت چپ میانه و سمت راست مد
- سمت راست میانه و سمت چپ مد
- سمت راست میانه و مد

- سمت راست میانه و مد
- توزیع دارای عدم تقارن مثبت، انحراف زیادی به سمت راست دارد و در نتیجه تعداد زیادی از مشاهدات در قسمت چپ آن واقع می شوند. در توزیع بازده ها، این به معنای زیانهای کوچک مکرر و چند سود کلان است. نتیجه آن می شود که این سودهای کلان، میانگین را به سمت راست می کشند در حالیکه مد با حجم زیادی از مشاهدات در سمت چپ باقی می ماند. میانه بین میانگین و مد واقع می شود.



- با استفاده از نابرابری چِبی شف و بدون توجه به شکل توزیع، حداقل مشاهدات یک جمعیت ۵۰۰ تایی که باید بین دو انحراف معیار قرار بگیرند، چقدر است؟

- 75%
- 89%
- 99%
- 70%

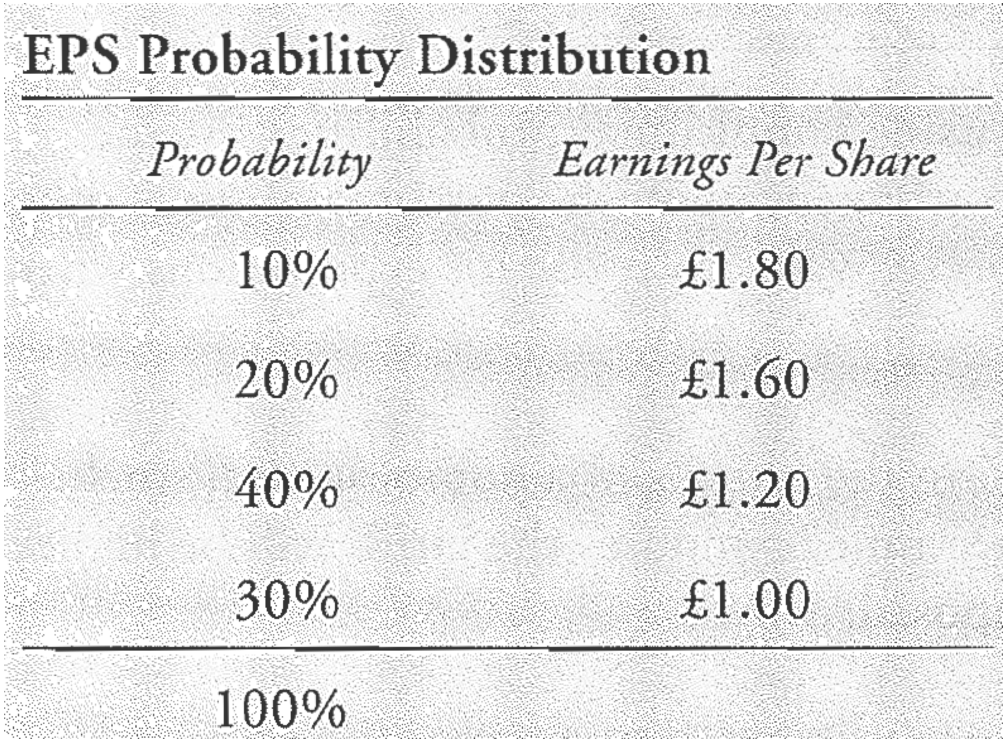
- نابرابری چبی شف، در مورد هر توزیعی صرف نظر از شکل آن صدق می کند و اظهار می کند که تعداد مشاهدات واقع شده در k انحراف معیار برابر است با $1 - 1/k^2$.
- در این مورد $k = 2$، $1 - 1/4 = 0.75$ یا 75% است.

- امید ریاضی انداختن یک تاس را محاسبه کنید؟

امید ریاضی انداختن یک تاس را محاسبه کنید؟

$$E(X) = \Sigma P(x_i)x_i = (1/6)(1) + (1/6)(2) + (1/6)(3) + (1/6)(4) + (1/6)(5) + (1/6)(6)$$
$$E(X) = 3.5$$

جدول توزیع احتمالات EPS شرکت الف در زیر آمده است. EPS انتظاری (امید ریاضی)، واریانس و انحراف معیار آنرا محاسبه کنید.



EPS Probability Distribution

Probability	*Earnings Per Share*
10%	£1.80
20%	£1.60
40%	£1.20
30%	£1.00
100%	

Probability	*Earnings Per Share*
10%	£1.80
20%	£1.60
40%	£1.20
30%	£1.00
100%	

$$E[EPS] = 0.10(1.80) + 0.20(1.60) + 0.40(1.20) + 0.30(1.00) = £1.28$$

$$\sigma^2_{EPS} = 0.10\ (1.80 - 1.28)^2 + 0.20\ (1.60 - 1.28)^2 + 0.40\ (1.20 - 1.28)^2 + 0.30\ (1.00 - 1.28)^2 = 0.0736$$

$$\sigma_{EPS} = (0.0736)^{1/2} = 0.27$$

- در جدول ذیل که قبلا دیدید، ارزش موردانتظار سبد و واریانس سبد را محاسبه کنید. با این فرض که ۴۰۰ تومان در سبد A و ۶۰۰ تومان در سبد B سرمایه گذاری شده است.

Joint Probability Function

Returns	R_B = 40%	R_B = 20%	R_B = 0%	$E(R_B)$ = 18%
R_A = 20%	0.15			Probabilities
R_A = 15%		0.60		
R_A = 4%			0.25	

$E(R_A) = 13\%$

$$Cov_{AB} = 0.15\,(0.20 - 0.13)\,(0.40 - 0.18) + 0.6\,(0.15 - 0.13)\,(0.20 - 0.18) + 0.25\,(0.04 - 0.13)\,(0 - 0.18) = 0.0066$$

$$Cov(R_i,R_j) = E\{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\}$$

Returns	$R_B = 40\%$	$R_B = 20\%$	$R_B = 0\%$
$R_A = 20\%$	0.15		
$R_A = 15\%$		0.60	
$R_A = 4\%$			0.25

$E(R_B) = 18\%$

Probabilities

$w_A = \$400 / (\$400 + \$600) = 0.40$

$w_B = \$600 / (\$400 + \$600) = 0.60$

$$E(R_P) = w_A E(R_A) + w_B E(R_B) = (0.4)(0.13) + (0.6)(0.18) = 0.16$$

$$Var(R_p) = \sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_B^2 w_B^2 + 2 w_A w_B Cov_{AB}$$

$$\mathrm{Var}(R_A) = P(R_{A1},R_{B1})[(R_{A1} - E(R_A)]^2 + P(R_{A2},R_{B2})[(R_{A2} - E(R_A)]^2 + P(R_{A3},R_{B3})[(R_{A3} - E(R_A)]^2$$

$$\mathrm{Var}(R_A) = (0.15)(0.20 - 0.13)^2 + (0.6)(0.15 - 0.13)^2 + (0.25)(0.04 - 0.13)^2 = 0.0030$$

$$\mathrm{Var}(R_B) = P(R_{B1},R_{A1})[(R_{B1} - E(R_B)]^2 + P(R_{A2},R_{B2})[(R_{B2} - E(R_B)]^2 + P(R_{B3},R_{A3})[(R_{B3} - E(R_B)]^2$$

$$\mathrm{Var}(R_B) = (0.15)(0.40 - 0.18)^2 + (0.6)(0.20 - 0.18)^2 + (0.25)(0.00 - 0.18)^2 = 0.0156$$

$$\mathrm{Var}(R_p) = \sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_B^2 w_B^2 + 2w_A w_B \mathrm{Cov}_{AB}$$

$$\mathrm{Var}(R_p) = (0.40)^2(0.003) + (0.60)^2(0.0156) + 2(0.4)(0.60)(0.0066) = 0.009264$$

- 7مدیر صندوق بازنشستگی مشخص کرده است که طی ۵ سال گذشته 85% از سهم های موجود در سبد سهام، سود پرداخت کرده اند و 40% از آنها اعلام تجزیه سهام کرده اند. در صورتی که 95% از سهم ها سود پرداخت می کردند و/یا اعلام تجزیه سهام می کردند، احتمال توام سهامی که هم سود پرداخت می کند و هم اعلام تجزیه سهام می کند، چقدر است؟

7مدیر صندوق بازنشستگی مشخص کرده است که طی ۵ سال گذشته 85% از سهم های موجود در سبد سهام، سود پرداخت کرده اند و 40% از آنها اعلام تجزیه سهام کرده اند. در صورتی که 95% از سهم ها سود پرداخت می کردند و/یا اعلام تجزیه سهام می کردند، احتمال توام سهامی که هم سود پرداخت می کند و هم اعلام تجزیه سهام می کند، چقدر است؟

احتمال وقوع حداقل یکی از دو رویداد، برابر است با مجموع احتمالات هر یک از رویدادها منهای احتمال توام دو رویداد:

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$95\% = 85\% + 40\% - P(AB)$$

$$P(AB) = 30\%$$

- با شماره پلاک ایران ۱۱ چند خودرو را می توان شماره گذاری کرد؟
- شماره گذاری به این ترتیب است که دو عدد، یک حرف الفبای فارسی و سپس سه عدد دیگر استفاده می شود.
- اعداد از یک تا ۹ هستند و حروف نیز ۳۲ عدد هستند.

- با شماره پلاک ایران ۱۱ چند خودرو را می توان شماره گذاری کرد؟
- شماره گذاری به این ترتیب است که دو عدد، یک حرف الفبای فارسی و سپس سه عدد دیگر استفاده می شود.
- اعداد از یک تا ۹ هستند و حروف نیز ۳۲ عدد هستند.
- ۹*۹*۹*۳۲*۹*۹=۱۸۸۹۵۶۸

- با شماره پلاک ایران ۱۱ چند خودرو را می توان شماره گذاری کرد؟ ارقام تکراری مجاز نمی باشند.
- شماره گذاری به این ترتیب است که دو عدد، یک حرف الفبای فارسی و سپس سه عدد دیگر استفاده می شود.
- اعداد از یک تا ۹ هستند و حروف نیز ۳۲ عدد هستند.

- با شماره پلاک ایران ۱۱ چند خودرو را می توان شماره گذاری کرد؟ ارقام تکراری مجاز نمی باشند.
- شماره گذاری به این ترتیب است که دو عدد، یک حرف الفبای فارسی و سپس سه عدد دیگر استفاده می شود.
- اعداد از یک تا ۹ هستند و حروف نیز ۳۲ عدد هستند.
- ۹*۸*۳۲*۷*۶*۵=۴۸۳۸۴۰

- ضریب همبستگی بازدهی سهام الف و ب برابر با ۰/۵ است. کوواریانس این دو سهام برابر با ۰/۰۰۴۳ است و انحراف معیار بازده سهام ب برابر با ۲۶٪ است. واریانس سهام الف را محاسبه کنید.

- ضریب همبستگی بازدهی سهام الف و ب برابر با ۰/۵ است. کوواریانس این دو سهام برابر با ۰/۰۰۴۳ است و انحراف معیار بازده سهام ب برابر با ۲۶٪ است. واریانس سهام الف را محاسبه کنید.

A. 0.0011.
B. 0.0331.
C. 0.2656.

ضریب همبستگی بازدهی سهام الف و ب برابر با ۰/۵ است. کوواریانس این دو سهام برابر با ۰/۰۰۴۳ است و انحراف معیار بازده سهام ب برابر با ۲۶٪ است. واریانس سهام الف را محاسبه کنید.

$$\mathrm{Corr}(R_A, R_B) = \frac{\mathrm{Cov}(R_A, R_B)}{[\sigma(R_A)][\sigma(R_B)]}$$

$$\sigma^2(R_A) = \left[\frac{\mathrm{Cov}(R_A, R_B)}{\sigma(R_B)\mathrm{Corr}(R_A, R_B)}\right]^2 = \left[\frac{0.0043}{(0.26)(0.5)}\right]^2 = 0.0331^2 = 0.0011$$

- در یک شرکت خیلی بزرگ، تعداد کارمندان مرد دو برابر تعداد کارمندان زن است. در صورتیکه یک نمونه چهارنفری از کارمندان انتخاب شوند احتمال اینکه هر چهار نفر زن باشند چقدر است؟

A) 0.3333.
B) 0.0625.
C) 0.0123.

- در یک شرکت خیلی بزرگ، تعداد کارمندان مرد دو برابر تعداد کارمندان زن است. در صورتیکه یک نمونه چهارنفری از کارمندان انتخاب شوند احتمال اینکه هر چهار نفر زن باشند چقدر است؟

P(male) = 2/3

P(female) = 1/3

$(0.333)^4 = 0.0123$

برای دو دارایی A و B شرایط زیر را داریم:

$E(R_A) = 0.10$, $E(R_B) = 0.10$,

$Var(R_A) = 0.18$, $Var(R_B) = 0.36$

همچنین ضریب همبستگی دو دارایی برابر ۰/۶ است. واریانس پورتفولیویی

که به طور مساوی در دو دارایی سرمایه گذاری شده باشد چقدر است؟

A) 0.1500.

B) 0.1102.

C) 0.2114.

- برای دو دارایی A و B شرایط زیر را داریم:

$E(R_A) = 0.10$, $E(R_B) = 0.10$,

$Var(R_A) = 0.18$, $Var(R_B) = 0.36$

همچنین ضریب همبستگی دو دارایی برابر ۰/۶ است. واریانس پورتفولیویی

که به طور مساوی در دو دارایی سرمایه گذاری شده باشد چقدر است؟

$$Var(R_p) = \sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_B^2 w_B^2 + 2 w_A w_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$$

$[(0.5^2) \times 0.18] + [(0.5^2) \times 0.36] + [2 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.6 \times (0.18^{0.5}) \times (0.36^{0.5})]$
$= 0.045 + 0.09 + 0.0764 = 0.2114$

- سبدی در چهار سال مختلف بازدهی های زیر را ایجاد کرده است. ضریب پراکندگی بازدهی های این پرتفولیو را محاسبه کنید.

Position	*Return*
A	17.0%
B	12.2%
C	3.9%
D	–8.4%

A) 1.56.
B) 3.12.
C) 1.89.

سبدی در چهار سال مختلف بازدهی های زیر را ایجاد کرده است. ضریب پراکندگی بازدهی های این پرتفولیو را محاسبه کنید.

Position	Return	$(R - 6.175\%)^2$
A	17.0%	117.18
B	12.2%	36.30
C	3.9%	5.18
D	–8.4%	212.43
Mean	6.175%	Sum = 371.09
Std. Dev. = $(371.09 / 4)^{0.5}$ = 9.63		
CV = 9.63 / 6.175 = 1.56		

- از هر ۱۰۰ نفری که وارد فروشگاه می شوند، ۷۵ نفر خرید انجام می دهند. در تهران یک روز در هر ۲۵ روز باران می بارد.
- احتمال اینکه فردی در روز غیر بارانی از فروشگاه خرید کند چقدر است؟

- از هر ۱۰۰ نفری که وارد فروشگاه می شوند، ۷۵ نفر خرید انجام می دهند. در تهران یک روز در هر ۲۵ روز باران می بارد.
- احتمال اینکه فردی در روز غیر بارانی از فروشگاه خرید کند چقدر است؟
- احتمال خرید و احتمال روز غیر بارانی
- پیشامدها مستقل از همند. پس از ضرب استفاده می شود.
- ۷۵/۱۰۰ * ۲۴/۲۵ = ۰.۷۲

- جعبه ای داریم که پر از مهره های سفید و سیاه است. احتمال اینکه ۶ مهره از آن خارج کنیم و دو تای آنها سفید باشند چقدر است د رصورتیکه احتمال خروج مهره سفید در هر دفعه ۰/۴می باشد.

- جعبه ای داریم که پر از مهره های سفید و سیاه است. احتمال اینکه ۶ مهره از آن خارج کنیم و دقیقا دو تای آنها سفید باشند چقدر است درصورتیکه احتمال خروج مهره سفید در هر دفعه ۰/۴می باشد.

$$x = 2,\ p = 0.4,\ n = 6$$

$$p(x) = (nCx)p^{x}(1-p)^{n-x} = \left(\frac{n!}{(n-x)!x!}\right)p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$p(2) = 15(0.4)^{2}(1-0.4)^{6-2} = 0.31$$