۱

اعداد حقیقی و نامساوی ها :

اعداد طبیعی : ۱، ۲، ۳، ... $\mathbb{N}$

اعداد حسابی : ۰، ۱، ۲، ۳، ... W

اعداد صحیح : ... و ۳ ، ۲ ، ۱ ، ۰ و ۱- و ۲- و ... $\mathbb{Z}$

کسرها $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$

اعداد اعشاری ۰/۵ ۱/۵

Q اعداد گویا : اعدادی هستند که می توان آنها را بصورت کسر نوشت.

$\frac{3}{0}$

Q' اعداد گنگ (اصم) : اعدادی هستند که نمی توان آنها را بصورت کسر نوشت.

اعداد گویا (کسری) ← طبیعی $\frac{5}{1}$

← حسابی

← صحیح

← کسرها (بشرط صفر نبودن مخرج)

← اعشاری (مختوم باشد) ← ۳/۲ ✓

← رادیکالی مربع کامل $\sqrt{4}=2$

۳/۲۵۳... ✗ (مختوم نباشد)

(متناوب) ۳/۲۵۲۵۲۵... ✓ $= 3/\overline{25}$

اعداد گنگ (اصم) :

کسرهای با مخرج صفر - اعداد اعشاری نا مختوم و نا متناوب -

اعداد رادیکالی $\sqrt{2}$ یا ... $\pi = 3/14159265...$

اعداد حقیقی : مجموعه کل اعداد گویا و اعداد گنگ گفته که با R نمایش میدهیم

نمایش نمودار ون:

خواص نامساوی: ① دو طرف نامساوی عددی کم یا زیاد کنیم برقراره

if: $a<b$

$a+c<b+c$

مثال) $۳<۴$ ، $+۲$ $+۲$ یا

$۵<۶$ $\quad -1<0$

② دو طرف نامساوی ضرب در یک عدد مثبت

مثال) $۳<۴$ $\times ۲$ $\times ۲$

$۶<۸$

if $a<b$

$ac<bc$ و $c>0$

③ دو طرف نامساوی ضرب در یک عدد منفی جای جهت و علامت عوض می‌شود.

(مهمترین ویژگی)

مثال) $۳<۴$ $\times(-۲)$ $\times(-۲)$

$-۶>-۸$

if $c<0$: $a<b$

$ac>bc$

(برعکس معادله و مجموعه جواب نامعادله بگیریم!) (تعریف نامعادله)

معادله: یک تساوی جبری مثل $۲x+۱=۳x-۱$

if $x=1 \rightarrow ۳=۲$ ✗

if $x=۲ \rightarrow ۵=۵$ ✓

نامعادله (یک نامساوی جبری) یعنی یک علامت $2x+7 \geq x-6$

if $x=1 \to 8 \geq -5$ ✓   if $x=-25$ $-43 \leq -31$

if $x=2$ ✓

if $x=-1 \to +5 \geq -7$ ✓

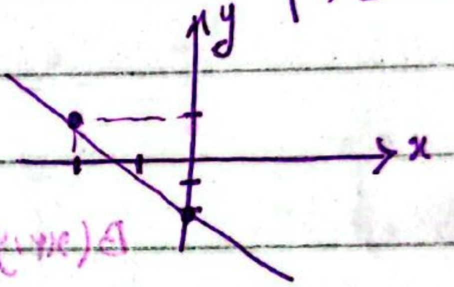
مقدار اعداد و نمودار معادلات :

مثال) معادله خط را رسم نمائید:

۱ روش نقطه‌یابی)

$y=-\frac{3}{2}x-2$

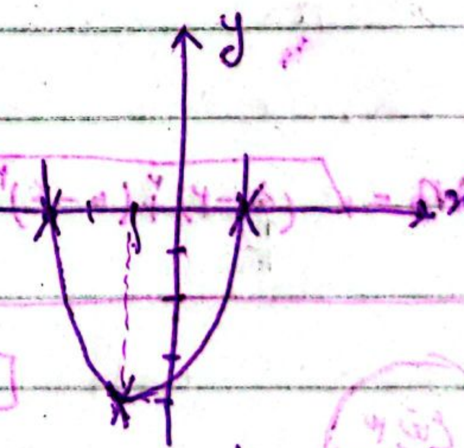
x	0	-2
y	-2	1



$1 \quad -2$

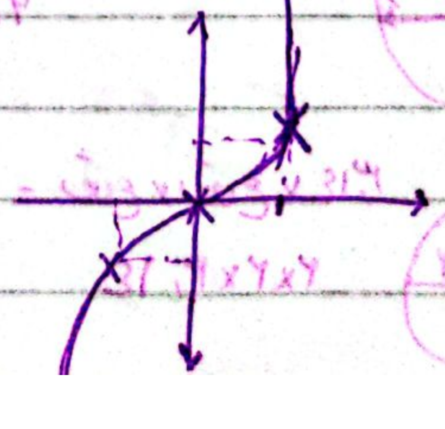
$y=x^2+2x-3$

x	-3	-1	$+1$
y	0	-4	0



$y=x^3$

x	0	1	-1
y	0	$+1$	-1



● معادله یک خط :

عرض

طول

① $y = \underset{=}{a}x + \underset{=}{b}$

شیب   عرض از مبدأ

الف) شیب و نقطه

ب) عرض از مبدأ و نقطه

الف مثال) شیب (۲) و نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$2 = \underbrace{2(-1)}_{-2} + b$

$2 + 2 = b = 4 \Longrightarrow \boxed{y = 2x + 4}$

ب مثال) عرض از مبدأ (۲) و نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

$6 = a(1) + 2$

$6 - 2 = a \Rightarrow a = 4$

$\boxed{y = 4x + 2}$

$A \xrightarrow{f} B$: ضابطه $\boxed{x} \to \boxed{y}$

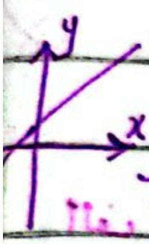
توابع: ضابطه (فرمول تابع) عبارت جبری برحسب x ، $y = f(x)$

دامنه (ورودی تابع) D_f

برد (خروجی تابع) R_f

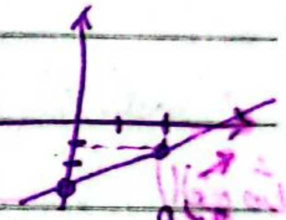
نمودار (مجموعه‌ای از نقاط دستگاه مختصات) $\{(x,y) \mid y = f(x)\}$

① توابع چندجمله‌ای ← توابع از درجه یک یعنی بیشترین توان x یک باشد در واقع یک تابع خطی مثل $y = ax+b$



مثال) ضابطه $f(x) = 2x - 3$

x	0	2
y	-3	1



$a > 0$

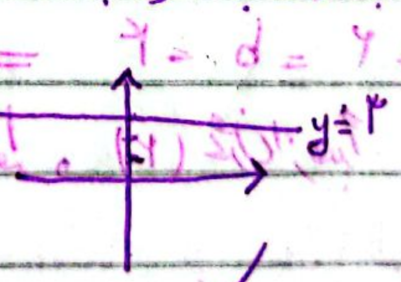
دامنه: $\mathbb{R}$

برد: $\mathbb{R}$

نمودار: خط راست

② توابع از درجه صفر که به آنها تابع ثابت می‌گوییم که ضریب $a = 0$ باشد

مثال) $y = b$ یا $y = 3$

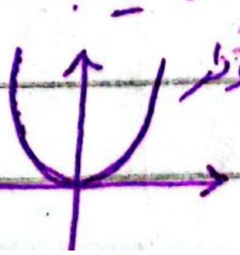


③ توابع از درجه ۲ (بیشترین توان x ۲ باشد) که تابع سهمی می‌نامند

دامنه: $\mathbb{R}$

برد: $[0, +\infty)$

نمودار



مثل $y = ax^2 + bx + c$

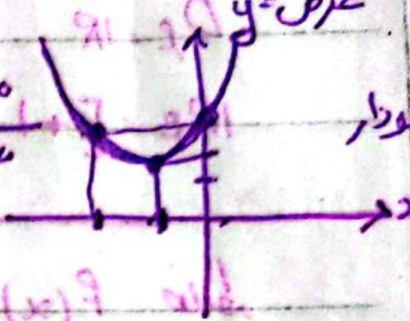
مثال) نمودار تابع $y=x^2+2x+3$ را رسم کنید و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

$a=1,\ b=2,\ C=3$

راس $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$

ضابطه $y=x^2+2x+3$

x	-2	-1	0
y	3	2	3



دامنه : $D_f=\mathbb{R}$

برد : $R_f=[2,+\infty)$

② توابع گویا: ضابطه $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$

دامنه $D_f=\mathbb{R}-\{x \mid \underbrace{q(x)=0}_{\text{ریشه‌های مخرج}}\}$

مثال) دامنه تابع زیر را بدست آورید.

① $f(x)=\frac{3}{x^2-2x}$

$x^2-2x=0 \longrightarrow x(x-2)=0 \begin{cases}\boxed{x=0}\\ \boxed{x=2}\end{cases}$ $D_f=\mathbb{R}-\{0,2\}$

③ توابع قدرمطلق:

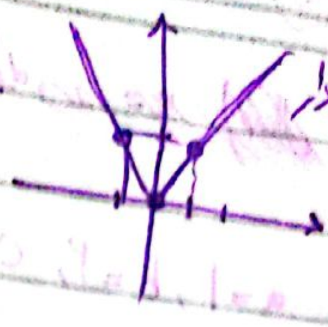
$\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

دامنه: $D_f = \mathbb{R}$

برد: $\mathbb{R}_f = [0 , +\infty)$

x	-1	0	$+1$
y	1	0	1

نمودار



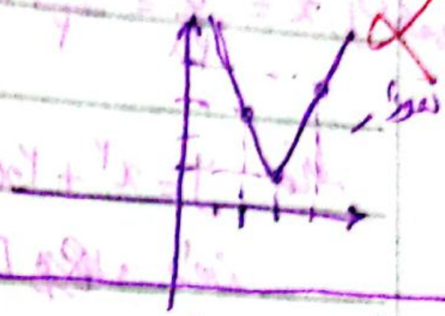
مثال) نمودار تابع $f(x) = |2x-6|$ را رسم کنید و برد تابع و دامنه تابع را بدست آورید.

$D_f = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}_f = [0 , +\infty)$

x	2	3	4
y	3	1	3

نمودار



④ تابع رادیکالی

ضابطه $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$

دامنه تابع:
- n زوج: $D_f = \{x \mid p(x) \geq 0\}$
- n فرد: $D_f = D_{p(x)} = \mathbb{R}$

مثال) دامنه توابع زیر را بدست آورید.

① $y = \sqrt[2]{2x-7}$

$2x-7 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 7 \rightarrow \boxed{x \geq \frac{7}{2}}$ $\quad D_f = [\frac{7}{2} , +\infty)$

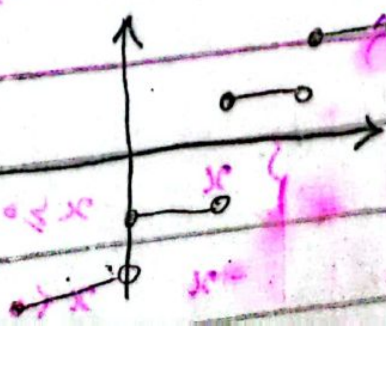
② $y = \sqrt[3]{\underbrace{x^2-2x+5}_{\text{چندجمله‌ای}}} \rightarrow D_f = \mathbb{R}$

⑤ تابع جزء صحیح

ضابطه: $f(x) = [x]$

دامنه: $\mathbb{R}$

برد: $\mathbb{Z}$



تعریف : (جزء صحیح) : جزء صحیح هر عدد حقیقی مانند x را با نماد $[x]$

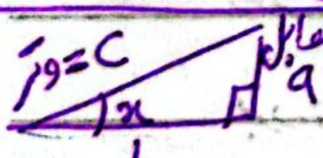
برابر است با الف) اگر x عدد صحیح باشد ← $[x] = x$

ب) اگر x عدد صحیح نباشد ← $[x] =$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از x

مثال) $[7] = 7$ $[3/2] = 3$ $[-3/5] = -4$

$[-4] = -4$ $[1/9] = 1$ $[-\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{0/5}] = -1$

۹) تابع مثلثاتی : تعریف نسبت‌های مثلثاتی (مثلث) :

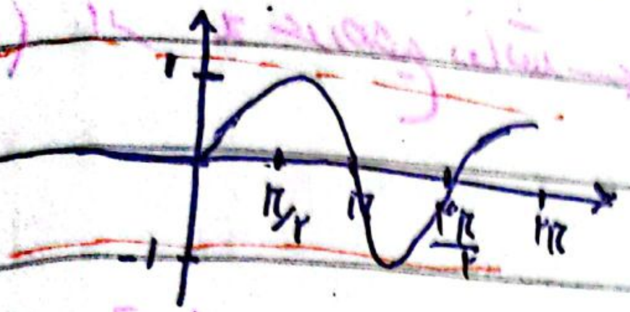


$\sin x = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$ $\tan x = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

$\cos x = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{c}$ $\cot x = \dfrac{b}{a}$

تبدیل درجه به رادیان

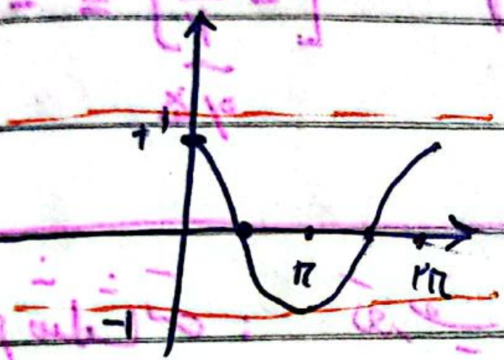
تابع $f(x) = \sin x$



دامنه: $\mathbb{R}$

برد: $[-1,+1]$

تابع $f(x) = \cos x$



دامنه: $\mathbb{R}$

برد: $[-1,+1]$

تمرین: $f(x) = \cot x$ دامنه و برد آن را به دست آورید.

$\operatorname{tg} x$

7) تابع معکوس (وارون): ابتدا تابع معکوس: معکوس تابع f را با نماد f^{-1} نمایش [می‌دهیم]

(ابتدا جای x و y را عوض کنیم و سپس y را تنها کنیم)

و هرچند به صورت زیر تعریف می‌شود.

اگر $f(a) = b \longrightarrow f^{-1}(b) = a$

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = R_f \\ R_{f^{-1}} = D_f \end{cases}$$

ورودی — خروجی

$$\boxed{a} \xrightarrow{f} \boxed{b}, \qquad \boxed{b} \xrightarrow{f^{-1}} \boxed{a}$$

مرتب کنید

$(a,b) \in f \;,\; f(a)=b$

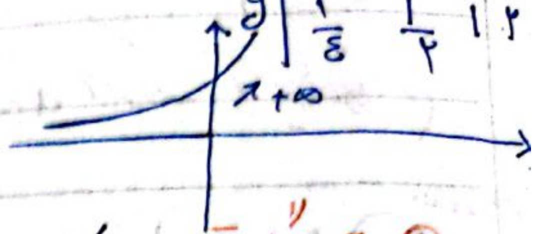
$(b,a) \in f^{-1} \;,\; f^{-1}(b)=a$

مثال) $f=\{(1,4),(2,3),(3,5)\}$, $f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}=\{(4,1),(3,2),(5,3)\}$, $f^{-1}(4)=1$

۸) تابع نمایی

مثال) رسم کنید $y=2^x$

x	-2	-1	0	1
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2



$f(x)=a^x$ که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است، تابع نمایی گفته می‌شود.

دامنه: $\mathbb{R}$

برد: $(0,+\infty)$

$f(x)=3^x$

$f(0)=3^0=1$

$f(2)=3^2=9$

$f(-2)=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

نکته: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

تعریف $= y=(\frac{1}{2})^x$

۹) تابع لگاریتمی

معکوس تابع نمایی را تابع لگاریتمی گویند و ضابطه آن به صورت $f(x)=\log_a^x$

تابع لگاریتم

$$\left\{ \log_a x = y \longleftrightarrow a^y = x \quad D_f=(0,+\infty) \right.$$

مثال) $f(x)=2^x$, $g(x)=\log_2 x$

$?=f(5)=2^5=32$, $?=g(32)=\log_2 32=5$

$\boxed{5} \xrightarrow{2} \boxed{32}$, $\log_2 x$: تابع معکوس

ویژگی های لگاریتم:

$\log_a 1 = 0$

$\log_5 1 = 0 \;(5^0=1)$

$\log_a a = 1$

$\log_{12} 12 = 1 \;(12^1=12)$

۱۰) تابع هیچ نوالیه

اگر $a^b=c$ ، $\log_a c = b$

$3^4=81 \rightarrow \log_3 81=4$

۷- الف تابع معکوس سینوس

$\boxed{\sin a = b \leftrightarrow \sin^{-1} b = a}$

شابلونه: $f(x)=\sin^{-1}x$ یا $f(x)=\text{Arc}\sin x$

دامنه: $[-1,+1]$

برد: $[-90^\circ, 90^\circ]$ یا $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

مثال) $\sin^{-1}(1)=? \rightarrow \sin x=1$

$\rightarrow x=90^\circ \Rightarrow \sin^{-1}(1)=90^\circ$

تمرین) $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})=45^\circ$

$\sin^{-1}(-\frac{1}{2})=-30^\circ$

ویژگی های $\ln(x)$

1) $\ln(e)=1$ — $\ln(e)=\log_e e=1$

2) $\ln(1)=0$ — $\ln(1)=\log_e 1=0$

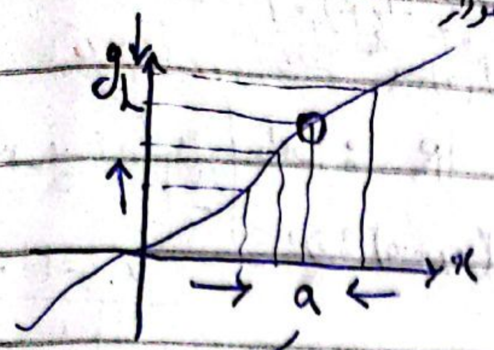
3) $e^{\ln x}=x$ — $e^{\ln 5}=5$

4) $\ln(e^x)=x$ — $\ln(e^2)=2$

تاریخ / /

موضوع

فصل دوم: حد و پیوستگی :



حد: یکی از ابزارهایی که به مطالعه دقیق رفتار تابع می‌پردازد.

(یک تابع را در نظر داریم با این شکل از نمودار، حال از دو طرف به a نزدیک می‌شویم مرور درس)

مشخص حد

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

x به a میل کند

حد: مقداری که برای خروجی یا (y) می‌افتد.

در واقع تابع را در حدود a، مورد بررسی قرار می‌دهیم. و تابع در حالی که از نزدیک بررسی می‌کنیم:

---

۳ نوع حد داریم:

حد ۰/۰ ③ — عدد/۰ ① حدهای بی‌نهایت — $x \to \infty$ ② حد در بی‌نهایت

① $\dfrac{\text{عدد}}{\text{حدی } 0} = \pm\infty$ و $\dfrac{\text{عدد}}{\text{حدی } 0}$ باید مشخص شود از چه نوعی

مثال: حد تابع $f(x)$ را در نقطه $x=2$ در صورت وجود بدست آورید.

(مثال) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x = 2$ راست و چپ

حل

$x \to 2^+$, $x > 2$, $x = 2{,}1$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{\underbrace{2^+}_{2,1} - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x \to 2^-$, $x < 2$

$$\lim f(x) = \frac{1}{\underbrace{2^-}_{1,9} - 2} = \frac{1}{}$$

③ حد نامتناهی در ∞ $\quad x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

مثال) $f(x) = x^3$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = x^3 = (\infty)^3 = +\infty$$

④ حد $\frac{0}{0}$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2$$

حدهای صفر صفر: تجزیه، تقسیم، رادیکال با فرجه ۲

مثال) $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x})^2-(1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

سؤال: نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+x^2+1$ بر دوجمله‌ای $x+1$ بخش‌پذیر است. حل ①

بخش‌پذیری:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \hline -2x^3-2x^2 & 2x^2-x+1 \\ -x^2+1 & \\ +x^2+x & \\ x+1 & \\ -x-1 & \\ 0 \to R & \end{array}$$

حل ②

$x+1=0 \to x=-1$

$g(-1)=2(-1)^3+(-1)^2+1$

$=-2+1+1=0$

$g(-1)=0$

حد توابع کسری:

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد

آنها در این نقطه به ترتیب L و m باشد به طوری که $m\neq 0$

تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{L}{m}$ است.

مثال) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=\dfrac{12}{6}=2$

یعنی خود صفر $\rightarrow$ صفر مطلق $\frac{0}{5}=0$

صفر $\rightarrow$ مطلق، حدی

مطلق $\lim\limits_{x\to 1^+}[x]-1=[1^+]-1=0$

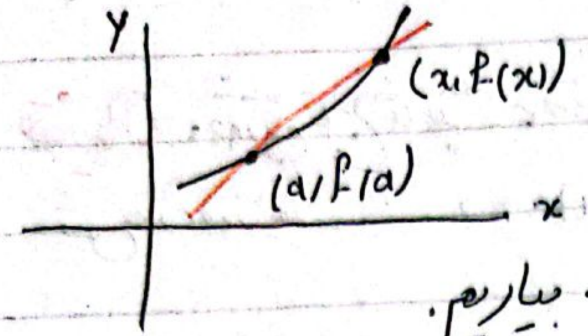
تعریف نشده $\frac{0/0000001}{0}$ مثل حدی 0

حدی $\lim x-1=1-1=0$

مطلق $\leftarrow 0$

مشتق : میزان تغییرات یک تابع نسبت به متغیرش می‌باشد.

برای توجیه بهتر از روی نمودار



ابتدا شیب خط دو نقطه را بدست بیاریم.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تغییرات y

تغییرات x

شیب خط مماس در نقطه $(a, f(a))$ چقدره؟ از حد استفاده می‌کنیم.

$$\text{شیب خط مماس} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مقدار مشتق یک تابع = شیب خط مماس در آن نقطه را نشان می‌دهد.

که با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهند.

مثال) مشتق تابع $\boxed{f(x) = x^2 - 3x + 1}$ را در $\boxed{x = 4}$ حساب کنید.

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \frac{0}{0}$$

$f(4) = 16 - 12 + 1 = 5$

صورت تجزیه

$$= \lim \frac{x^2 - 3x + 1 - 5}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{(x+1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}} = 5$$

قواعد مشتق گیری (فرمول های مشتق)

قضیه ① : مشتق تابع ثابت، صفر است.

ضابطه $f(x) = c$ (عدد حقیقی) $\Rightarrow f'(x) = 0$ مشتق عدد، صفر است.

مثال

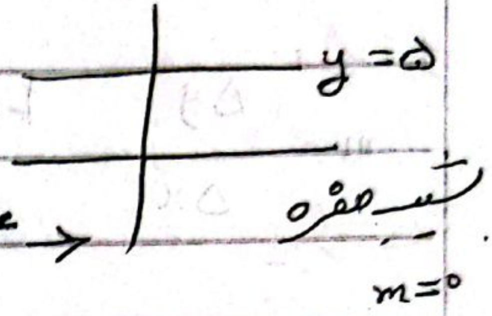
$y = 5$

$y = -3$

$y = \sqrt{2}$

$\Rightarrow y' = 0$

علت



قضیه ② : برای هر عدد حقیقی n، اگر $f(x) = x^n$ آنگاه $f'(x) = nx^{n-1}$ است.

مثال ۱) مشتق توابع زیر را بدست آورید.

$f(x) = x^6 \longrightarrow f'(x) = 6x^5$

$f(x) = x^{-9} \longrightarrow f'(x) = -9x^{-9-1} = -9x^{-10}$

به عنوان نکته: $y = x \rightarrow y' = 1$

مثال ۱) مشتق توابع را بدست آورید.

$f(x) = x^{\frac{3}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

$f(t) = t^3 \rightarrow f'(x) = 3t^{3-1} = 3t^2$

نکته: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

توان باید قرینه شود

باشه ۳) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \longrightarrow f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2\frac{1}{x^3}$

نکته: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

۴) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\frac{1\times 2}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

تمرین ۵) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} =$

۶) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

قضیه ۲: اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع مشتق پذیر باشند و c مقداری ثابت

در اینصورت الف) $[c f(x)]' = c f'(x)$

مثال) $y = 5x^3 \longrightarrow y' = 5(3x^2) = 15x^2$

$$y = 7\sqrt{x} \longrightarrow y' = 7\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{x}}$$

ب) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

مثال)

$$y = x^7 - 3x + 9 \longrightarrow y' = 7x^6 - 3 + 0$$

$$y = 4x^3 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{2x^{-1}} \longrightarrow y' = 4\times 3x^2 + (-2x^{-2}) = 12x^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$[f(x)g(x)]' \quad (ج$$

نکته $= (f\,g)' \neq f'g' \qquad = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

مثال) $y = \underbrace{(x^3 + x)}_{f}\underbrace{(1 + 5x^2)}_{g}$

$$\to y' = (3x^2 + 1)(1 + 5x^2) + (0 + 10x)(x^3 + x)$$

مثال) $y = (s^2 + s + 1)(s^2 + 2)$

$$\to y' = (\quad)(s^2 + 2) + (\quad)(s^2 + s + 1)$$

نکته: $\left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{f'}{g'} \qquad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \quad (د$

$$y = \frac{2x^4 - 3x + 1}{x + 7}$$

$$\to y' = \frac{(8x^3 - 3)(x + 7) - (1)(2x^4 - 3x + 1)}{(x + 7)^2}$$

$$y = \frac{1}{x + 2} \to f'(x) = \frac{(0)(x + 2) - (1)(1)}{(x + 2)}$$

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)\,f'(g(x)) \quad (ه$$

a $\quad \sin x = \dfrac{}{\text{وتر}}$

b مجاور

قضیه ۴. (مشتق توابع مثلثاتی)

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$(1+tg^2 x)$
$\cot x$	$-(1+\cot^2 x)$

مثال: مشتق توابع را بدست آورید $y = \cancel{\ldots}\ x^2 \cos x = ?$

$$y = x^2 \cos x \longrightarrow y' = (2x)(\cos x) + (-\sin x)(x^2)$$

$$\longrightarrow (fg)' = f'g + g'f$$

قضیه ۵. (مشتق توابع لگاریتمی)

قضیه ۶. (مشتق توابع معکوس مثلثاتی)

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1}(x)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$tg^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{x^2+1}$
$\cot^{-1}(x)$	$\dfrac{-1}{x^2+1}$

مثال)

① $y = x \sin^{-1} x$

$$\longrightarrow y' = (1)\sin^{-1} x + \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)(x) \checkmark$$

② $y = 2\tan^{-1} x + 5x - 2$

$y = f(x) \longrightarrow y' = \frac{df}{dx} = f'(x)$: مشتق ضمنی

گاهی عبارات x و y ضمن یکدیگرند و ما باید از مشتق گیری ضمنی استفاده

~~مثال~~

مشتق F نسبت به x وقتی y عدد فرض شده

$$F(x,y) = 0 \longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

مشتق F نسبت به y وقتی x عدد فرض شده.

مثال)

$$x^2y + x^3y^3 + x\sin y = 5x - 6y + 2$$

$5x \to 5$

حل) $\underbrace{x^2y + x^3y^3 + x\sin y - 5x + 6y - 2}_{F(x,y)} = 0$

$$y' = \frac{F_x}{F_y} = \frac{2xy + 3x^2y^3 + \sin y - 5 + 0 - 0}{x^2 + 3y^2x^3 + x\cos y - 0 + 6 - 0}$$

مثال ۲)

$$y = 5\ln x - 3\log_2 x$$

$$= 5 \times \frac{1}{x} - 3 \times \frac{1}{x \ln 2} =$$

مشتق تابع ترکیب: اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مشتق پذیر باشند

آنگاه ترکیب تابع fog مشتق پذیر است $(fog)'(x) = g'(x) f'(g(x))$ $f(g(x))'$

مثال) $f(x) = x^3 - 2x$ و $g(x) = 5x^4 \to g'(x) = 20x^3$

$$(fog)'(x) = g'(x)\, f'(g(x)) = (20x^3)\left(3(5x^4)^2 - 2\right)$$

$$(gof)'_{(x)} = f'(x)\, g'(f(x))$$

$$= (3x^2 - 2)\left(20(x^3 - 2x)^3\right)$$

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ $= \frac{-1}{x^2}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(fog)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$$

$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{2\sqrt{1/x}}$$

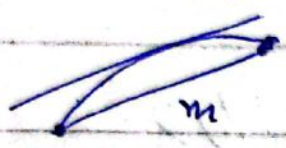
در تابع f به جای x در f جایگذاری $g(x)$ را بگذارید

قضیه (مقدار میانگین) : فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ در $[a,b]$ پیوسته

و در (a,b) مشتق پذیر باشد. در این صورت یک نقطه $c\in(a,b)$

وجود دارد به طوری که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



قضیه رل - میانگین دهم بررسی کن.

انتگرال :

- اولین مبحث که بررسی کنیم انتگرال نامعین می باشد از مشتق

می‌دانیم که $f(x)=x^2$ $\longrightarrow f'(x)=2x$ حال اگر این مطلب

برعکس نگاه کنیم.

یعنی سوال بپرسیم مشتق چه تابعی $2x$ شده ؟

جواب این سوال در حقیقت به عبارت انتگرال بیان می شود

در واقع انتگرال را پاد مشتق مطرح می‌نامند

(پس مشتق تابع را می‌دهیم و خود تابع را می‌خواهیم)

مثال) $F(x)=\sin x$ را تابع اولیه $f(x)=\cos x$ گویند.

زیرا $(\sin(x))' = \cos x$

مثال) تابع $G(x)=x^2+5x+1$ را تابع اولیه $f(x)=2x+5$ گویند

زیرا $(x^2+5x+1)' = 2x+5$

انتگرال نامعین (اولین مبحث)

اگر $F(x)+C$ تابع اولیه $f(x)$ باشد در اینصورت

S کشیده — x دیفرانسیل

انتگرال نامعین $f(x)$ را که به نماد $\int f(x)dx$

برابر با $F(x)+C$. به عبارت دیگر

مشتق F بزرگ — f کوچک

پس

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \iff F'(x)=f(x)$$

اگر و تنها اگر

توجه: پس اگر ما مشتق یک تابع را داشته باشیم. انتگرال اون تابع هم داریم!

مثال) $(3x^2+7x)' = 6x+7$ بنابراین $\int 6x+7\,dx$

$= 3x^2+7x+C$

مثال) درستی انتگرال زیر را بررسی کنید.

① $\int \ln x \, dx = x\ln x - x + C$

حل) $(x\ln x - x + C)' = (1)(\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)(x) - 1$

$= \ln x + \cancel{1} - \cancel{1} = \ln x$ ✓

نکته: با داشتن فرمول های مشتق توابع می‌توان فرمول های انتگرال را بدست آورد و در قسمت های بعد فرمول های انتگرال ها را بیان کنیم. اما قبل از آن چند ویژگی انتگرال نامعین را توجه کنید.

ویژگی ① الف) $\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

ب) $\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

ویژگی ② اگر $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ باشد در این صورت

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

۱) انتگرال توابع ثابت و چندجمله‌ای:

① $\int k\,dx = kx + C \quad k \in \mathbb{R}$ ، $\int 5\,dx = 5x + c$

② $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3}$

حالت خاص: $\int dx = x + c$ ، $\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + c$

(وقتی عدد یک داریم نوشته نشده)

مثال) انتگرال های زیر را بدست آورید.

سؤال امتحان

① $\int -3\,dx = -3x + C$

② $\int \sqrt{x}\,dx = \sqrt{2x} + c$

③ $\int x^9\,dx = \dfrac{x^{10}}{10} + C$

④ $\int (2x-1)^3\,dx = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(2x-1)^4}{4}$ $\left(\dfrac{x^{10}}{10}\right) \neq \dfrac{10x^9}{10}$

ضرب دو عدد ۲ حذف کردن

(۹۸ دی) ... کنکور

نیست.

⑤ $\int (x^2-1)^2\,dx = \int x^4-2x^2+1\,dx = \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x + C$

⑥ $\int x^{-6}\,dx = \frac{x^{-5}}{-5} + C$

⑦ $\int 5x^2 - 3x + \underbrace{7}_{\text{سیگما}}\,dx = 5\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 7x + c$

انتگرال عدد در یک x ضرب

شرح خطی

⑧ مهم (انتگرال کسری)

$\int \underbrace{\frac{x^2-3x}{x}}_{\text{کسر باز شود}}\,dx = \int \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x}\,dx = \int x - 3\cancel{x}\,dx$

$= \frac{x^2}{2} - 3x + C$

نکته: انتگرال توابع رادیکالی و توابع $\frac{1}{x^n}$ از فرمول زیر

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ و $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

مثال ۱) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

② $\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$

جواب مرتب کنیم

موضوع

(۳) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$

(۴) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

مهم
در انتگرال ضرب
تک تک ضرب
نمی‌شوند.

(۵) $\int x\sqrt{x}\,dx = \int x\,x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$

(۶) $\int \sqrt[3]{x}\,(2x-1)\,dx = \int \left(2x\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}\right) dx$

$= \int \left(2x\,x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right) dx$

$= \int \left(2x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right) dx =$

(۷) $\int \dfrac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \dfrac{x^2}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} = \int x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{6}}\,dx =$